serie de matemática

monografía no. 18

INTRODUCCION A LA INTEGRAL DE LEBESGUE EN LA RECTA

Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico
Departamento de Asuntos Científicos
Secretaría General de la
Organización de los Estados Americanos

$$\int \sum = \sum \int$$

$$\int \lim = \lim \int$$

INTRODUCCION A LA INTEGRAL DE LEBESGUE EN LA RECTA

por

Juan Antonio Gatica
LAM Universidad Técnica del Estado
Santiago, CHILE

y

Department of Mathematics
The University of Iowa
Iowa City, Iowa, ESTADOS UNIDOS

Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico
Departamento de Asuntos Científicos
Secretaría General de la
Organización de los Estados Americanos
Washington, D.C. - 1977

Esta monografía ha sido preparada para su publicación en el Departamento de Asuntos Científicos de la Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos.

Editora: Eva V. Chesneau

Asesor Técnico: Dr. Djairo Guedes de Figueiredo
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Universidade de Brasília
Brasília, D.F., Brasil

A los lectores

El programa de monografías científicas es una faceta de la vasta labor de la Organización de los Estados Americanos, a cargo del Departamento de Asuntos Científicos de la Secretaría General de dicha Organización, a cuyo financiamiento contribuye en forma importante el Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico.

Concebido por los Jefes de Estado Americanos en su Reunión celebrada en Punta del Este, Uruguay, en 1967, y cristalizado en las deliberaciones y mandatos de la Quinta Reunión del Consejo Interamericano Cultural, llevada a cabo en Maracay, Venezuela, en 1968, el Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico es la expresión de las aspiraciones preconizadas por los Jefes de Estado Americanos en el sentido de poner la ciencia y la tecnología al servicio de los pueblos latinoamericanos.

Demostrando gran visión, dichos dignatarios reconocieron que la ciencia y la tecnología están transformando la estructura económica y social de muchas naciones y que, en esta hora, por ser instrumento indispensable de progreso en América Latina, necesitan un impulso sin precedentes.

El Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico es un complemento de los esfuerzos nacionales de los países latinoamericanos y se orienta hacia la adopción de medidas que permitan el fomento de la investigación, la enseñanza y la difusión de la ciencia y la tecnología; la formación y perfeccionamiento de personal científico; el intercambio de informaciones, y la transferencia y adaptación a los países latinoamericanos del conocimiento y las tecnologías generadas en otras regiones.

En el cumplimiento de estas premisas fundamentales, el programa de monografías representa una contribución directa a la enseñanza de las ciencias en niveles educativos que abarcan importantísimos sectores de la población y, al mismo tiempo, propugna la difusión del saber científico.

La colección de monografías científicas consta de cuatro series, en español y portugués, sobre temas de física, química, biología y matemática. Desde sus comienzos, estas obras se destinaron a profesores y alumnos de ciencias de los primeros años de la universidad; de estos se tiene ya testimonio de su buena acogida.

Esta introducción brinda al Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico de la Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos la ocasión de agradecer al doctor Juan Antonio Gatica, autor de esta monografía, y a quienes tengan el interés y buena voluntad de contribuir a su divulgación.

mayo de 1977

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN Y PRERREQUISITOS

En esta monografía daremos una breve reseña de algunos resultados, ya clásicos, sobre la integral de Lebesgue en la recta real. Comenzaremos definiendo una familia de subconjuntos del cuerpo de los reales que llamaremos medibles, y definiremos para cada uno de ellos cuál es su medida, exigiendo, entre otras cosas, que los intervalos de números reales sean medibles y que su medida coincida con nuestra idea intuitiva de longitud.

Bien estaría que todos los subconjuntos de la recta real fuesen medibles; mas por desgracia esto no ocurre, de modo que habrá que contentarse con encontrar la familia más extensa posible de conjuntos que se pueden medir.

Ahora se hará un resumen de los conceptos y resultados que suponemos los lectores dominan. Además, se demostrarán algunos hechos que emplearemos más adelante y que no se suponen conocidos con anterioridad.

También conviene advertir que, al igual que ocurre en todo texto de matemáticas, la comprensión de esta monografía exige que el lector posea un buen grado de experiencia lógica.

Creemos requisito indispensable para la comprensión de este texto que el lector haya seguido al menos un primer curso de Cálculo. Supondremos, por consiguiente, que se conoce el cuerpo ordenado completo de los números reales.

Si a y b son números reales, por $a < b$ o $b > a$ se indica que a es menor que b, y por $a \leq b$ o $b \geq a$, que a es menor o a lo sumo igual a b.

Se denotará por:

N el conjunto de los enteros positivos, llamados también naturales, es decir, $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Z el conjunto de los enteros, es decir, $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

Q el conjunto de los números racionales.

R el conjunto de los números reales.

Sean X y A dos conjuntos; se dice que A es un subconjunto de X, lo que se denota por $A \subseteq X$, si todo elemento de A es también elemento de X. Se dirá que A es igual a X, $A = X$, si A y X poseen los mismos elementos. Si A es un subconjunto de X y A es distinto de X, se escribirá

$A \subset X$. Además, si X es un conjunto, se denotará por $P(X)$ el conjunto de todos los subconjuntos de X, el cual se denomina también conjunto de las partes de X.

Si A y B son subconjuntos de un conjunto X, denotaremos por $A \cup B$ y $A \cap B$ la unión y la intersección respectivamente de A y B.

Denotaremos por:

$$\{x : P\}$$

el conjunto de todos los elementos x que tienen la propiedad P, y por ϕ el conjunto vacío, es decir, el único conjunto que no posee elementos (obsérvese que ϕ es subconjunto de cualquier conjunto). Si A y B son subconjuntos de X, se dirá que A y B son disjuntos si $A \cap B = \phi$.

Observemos que si A, B y C son subconjuntos de un conjunto X, se tiene:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

y

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Si A y B son subconjuntos del conjunto X, denotaremos por $A \setminus B$ el complemento de B relativo a A, es decir, $A \setminus B$ es el subconjunto de X, cuyos elementos son aquellos que pertenecen a A y no a B. El conjunto $X \setminus A$ recibe el nombre de complemento de A en X (o, cuando no haya lugar a confusión, el complemento de A).

A continuación se da una lista de los símbolos que usaremos, así como el significado que se les asigna:

$\in$	pertenece
$\forall$	para todo
$\exists$	existe
$\ni$	tal que
$\Rightarrow$	implica
$\Leftrightarrow$	si y sólo si.

Así, por ejemplo, la frase: "si q es un elemento de Q, entonces existen enteros $m, n \neq 0$, tales que $q = \frac{n}{m}$", se traduce en:

$$q \in Q \Rightarrow n, m \in Z, m \neq 0, \ni q = \frac{n}{m}.$$

Sean X e Y conjuntos. Recordemos que una función (o aplicación) f de X en Y es una regla que asocia a cada elemento de X un único elemento de Y (en realidad se podría recordar una definición mucho más formal, pero no lo creemos necesario). En este caso se dice que X es el dominio de f, que Y es el codominio de f, y se usará la notación $f : X \to Y$ para indicar que f es una función de X en Y. Además, si x es un elemento de X, denotaremos por $f(x)$ el único elemento de Y asociado con x mediante f y lo llamaremos la imagen de x por f.

Si X e Y son conjuntos, $f: X \to Y$ es una función y $A \subseteq X$, se define el conjunto $f(A)$, la imagen directa (o, simplemente imagen) de A por f, como el subconjunto de Y cuyos elementos son las imágenes por f de elementos de A. En símbolos:

$$f(A) = \{y \in Y : \exists\, x \in A \ni f(x) = y\}.$$

El conjunto $f(X)$ recibe el nombre de recorrido (o imagen) de f. Si $f(X) = Y$, diremos que f es sobreyectiva.

Ahora, si $B \subseteq Y$, se define la imagen inversa de B por f, $f^{-1}(B)$, como el subconjunto de X cuyos elementos son aquellos cuya imagen por f pertenece a B, es decir:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Es inmediato que si B_1 y B_2 son dos subconjuntos de Y, resulta:

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

$$f^{-1}(Y \setminus B_1) = X \setminus f^{-1}(B_1).$$

Si X e Y son conjuntos y $f: X \to Y$ es una función, se dice que f es inyectiva si, dados dos elementos distintos en X, sus imágenes respectivas (por f) son elementos diferentes en Y. Es decir, f es inyectiva si

$$x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Es inmediato que $f: X \to Y$ es inyectiva si, y sólo si:

$$x_1, x_2 \in X,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Si $f: X \to Y$ es una función, se dirá que f es biyectiva siempre que f sea inyectiva y sobreyectiva.

Sean I y X conjuntos. Una familia de elementos de X, con conjunto de índices I, es una función $f: I \to X$. El recorrido de f es el conjunto de elementos de la familia. Por abuso de notación, la familia $f: I \to X$ se denotará a menudo por $\{f(i)\}_{i \in I}$ o por $\{x_i\}_{i \in I}$, donde $x_i = f(i)\ \forall\, i \in I$.

Obsérvese que todo conjunto se puede considerar como el conjunto de elementos de la familia $I: X \to X$, donde $I(x) = x,\ \forall\, x \in X$.

Si X es un conjunto y $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos de X (es decir, una familia de elementos de $P(X)$), la unión de la familia, $\bigcup_{i \in I} A_i$ se define como el conjunto:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X : \exists\ i \in I \ni x \in A_i\},$$

y la intersección de esta familia, $\bigcap_{i \in I} A_i$, se define como el conjunto:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X : x \in A_i,\ \forall\, i \in I\}.$$

Diremos que una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X es disjunta si

$$i, j \in I,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Si n es un número natural, se denotará por $I(n)$ el conjunto de todos los números naturales menores o iguales a n. Es decir:

$$I(n) = \{k \in N : k \leq n\}.$$

Recordemos que un conjunto X se dice finito si $X = \emptyset$ o si existe una función biyectiva $f: X \to I(n)$ para algún $n \in \mathbf{N}$. Si $X = \emptyset$, se dice que X tiene 0 elementos, y si X es finito y no vacío, el (único) número natural n tal que existe una biyección de X en $I(n)$ recibe el nombre de número de elementos de X. Si X es un conjunto no finito y tal que existe una biyección de X sobre N, se dice que X es enumerable. Un conjunto X se dice numerable si X es finito o enumerable. Si X no es finito, se dice que X es infinito.

Sean X un conjunto y $\{x_i\}_{i\in I}$ una familia de elementos de X. Diremos que ésta es finita, numerable, enumerable, infinita, en caso que I sea del tipo respectivo.

Si $A \subseteq R$, y $A \neq \emptyset$ es un subconjunto finito de R (o una familia finita de números reales), entonces existen x_0 y $x_1 \in A$ tales que:

$$x_0 \leq x \leq x_1 \quad \forall \quad x \in A.$$

Es claro que x_0 y x_1 son los únicos que poseen esta propiedad. Diremos que x_0 es el menor elemento de A (o mínimo de A), y que x_1 es el mayor elemento de A (o máximo de A). Los denotaremos por:

$$x_0 = \text{mín}\,(A),\ x_1 = \text{máx}\,(A).$$

Recuérdese además que si X es un conjunto y $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia numerable de subconjuntos numerables de X, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es un conjunto numerable. De aquí se deduce con facilidad que Q es un conjunto numerable.

Si X es un conjunto, una sucesión de elementos de X es una familia de elementos de X con $\mathbf{N}$ como conjunto de índices. En este caso se escribirá a menudo $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en vez de $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. Si $m \in \mathbf{N}$, se dirá que x_m es el término de orden m de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ son dos sucesiones de elementos de X, diremos que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en caso de que exista una función $g: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ tal que:

a) $n, m \in \mathbf{N},\ n < m \Rightarrow g(n) < g(m)$,

b) $y_n = x_{g(n)}\ \forall\ n \in \mathbf{N}$.

En este caso denotaremos $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ por $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, donde $n_i = g(i)\ \forall\ i \in \mathbf{N}$. Así, por ejemplo, $\left\{\frac{2n+1}{3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de la sucesión de números racionales $\left\{\frac{n}{3}\right\}_{n=1}^{\infty}$, donde $g(n) = 2n + 1\ \forall\ n \in \mathbf{N}$.

Ahora se hará una breve reseña de los conocimientos imprescindibles sobre análisis en la recta real.

Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales y $x_0 \in R$, se dice que x_0 es el límite de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, o que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia x_0, o que x_n tiende a x_0 al tender n al infinito, si:

$$\varepsilon \in R,\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\ N \in \mathbf{N} \ni |x_n - x_0| < \varepsilon\ \forall\ n \in \mathbf{N},\ n \geq N.$$

Si x_0 es el límite de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, se escribe

$$x_0 = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Es muy fácil ver que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales que converge hacia x_0, y si $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es cualquier subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, también $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia x_0.

Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales, y si existe $x_0 \in R$ tal que $x_0 = \lim_{n \to \infty} x_n$, se dice que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. Es casi inmediato que toda sucesión convergente de números reales tiene un límite único.

Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales, se dice que es:

a) Monótona creciente si: $n, m \in \mathbf{N},\ n \geq m \Rightarrow x_n \geq x_m$.

b) Monótona decreciente si: $n, m \in \mathbf{N},\ n \geq m \Rightarrow x_n \leq x_m$.

c) Monótona, simplemente, si es monótona creciente o monótona decreciente.

d) Acotada si existe $M \in R,\ M \geq 0$, tal que

$$|x_n| \leq M\ \forall\ n \in \mathbf{N}.$$

Una consecuencia de fácil deducción de la completitud de los números reales es que toda sucesión monótona y acotada de estos es convergente.

Dada una sucesión de números reales, interesa a veces poder determinar si es o no convergente, sin necesidad, en el caso de convergencia, de hallar su límite. Para ello recuérdese que la sucesión de números reales $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ se dice "de Cauchy" si dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbf{N}$ tal que:

$$n, m \in \mathbf{N},\ n \geq N,\ m \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Se sabe que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente si, y sólo si, es una sucesión de Cauchy.

Recordemos ahora algunos hechos concernientes a las sucesiones convergentes de números reales. Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos de ellas, ambas convergentes y $a \in R$. En tal caso:

1) La sucesión $\{ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} (ax_n) = a(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

2) La sucesión $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) + (\lim_{n\to\infty} y_n).$$

3) La sucesión $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} y_n).$$

4) Si $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, existe $N_0 \in \mathbf{N}$ tal que $y_n \neq 0$, para todo número natural n mayor o igual que N_0, y la sucesión $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}_{n=N_0}^{\infty}$ es convergente, y se tiene además:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}.$$

Se define la serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ como el par $(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{s_n\}_{n=1}^{\infty})$, donde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales y $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión definida por:

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \;\; \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

La sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ recibe el nombre de sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Diremos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ también lo es y en este caso, por abuso de notación nuevamente, se escribirá

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

y diremos que $\lim_{n\to\infty} s_n$ es la suma de la serie.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, se tiene que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ya que $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n \;\forall\, n \in \mathbf{N}$ y $\lim_{n\to\infty} s_n$ existe.

Se dice que la serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente en caso que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sea convergente.

Es fácil demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente también es convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Esto se consigue observando que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si, y sólo si, la sucesión de sumas parciales es de Cauchy, y recordando que si $a_1, \ldots, a_n \in R$, resulta $|a_1 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + \ldots + |a_n|$.

Recuérdese ahora que, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series convergentes de números reales y $c \in R$ se tiene:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n)$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n) = c(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = (\sum_{n=1}^{\infty} a_n) + (\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$.

Ahora pasaremos a estudiar un poco la "estructura" de algunos subconjuntos de R.

Si $a, b \in R$ y $a \leq b$, se definen:

1) El intervalo abierto de extremos a y b, denotado por (a, b), como el conjunto: 7

$$(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}.$$

2) El intervalo cerrado de extremos a y b, denotado por $[a, b]$, como el conjunto:

$$[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}.$$

3) Los intervalos semiabiertos (o semicerrados), $[a, b)$ y $(a, b]$, como los conjuntos:

$$[a, b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in R : a < x \leq b\}.$$

Si $a \in R$, los conjuntos (a, ∞), $(-\infty, a)$, $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$, $(-\infty, \infty)$, se definen por:

$$(a, \infty) = \{x \in R : a < x\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in R : x < a\}$$

$$[a, \infty) = \{x \in R : a \leq x\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in R : x \leq a\}$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbf{R}.$$

Sea E un subconjunto de R; se dirá que E es un intervalo si es de la forma: $(-\infty, \infty)$, (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞) ó

$[a,\infty)$. Se dirá que E es un intervalo abierto si es de la forma (a,b) ó (a,∞) ó $(-\infty,a)$ ó $(-\infty,\infty)$. Se dirá que E es un intervalo cerrado si puede denotarse por $[a,b]$ ó $[a,\infty)$ ó $(-\infty,a]$ ó $(-\infty,\infty)$.

Es fácil demostrar que, si E es un subconjunto de R, entonces E es un intervalo si, y sólo si:

$$a,b \in E,\ a < b \Rightarrow (a,b) \subseteq E.$$

Si U es un subconjunto de R, diremos que U es abierto si posee la siguiente propiedad:

$$x \in U \Rightarrow \text{existe un intervalo abierto } I \text{ tal que } x \in I \subseteq U.$$

Es inmediato que un subconjunto U de R es abierto si, y sólo si:

$$x \in U \Rightarrow \exists\ \epsilon_x \in R,\ \epsilon_x > 0 \ni (x-\epsilon_x, x+\epsilon_x) \subseteq U.$$

Si C es un subconjunto de R, se dirá que C es cerrado si $R\backslash C$ es abierto.

Es fácil demostrar que si $I \subseteq R$ es un intervalo, resulta:

i) I es un intervalo abierto $\Leftrightarrow I$ es un conjunto abierto.

ii) I es un intervalo cerrado $\Leftrightarrow I$ es un conjunto cerrado.

Algunas propiedades evidentes de los conjuntos abiertos y de los conjuntos cerrados son:

1) Si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una familia de conjuntos abiertos (de R), entonces $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ es un conjunto abierto.

2) Si $\{U_1,\ldots,U_n\}$ es una colección finita de subconjuntos abiertos de R, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ es un conjunto abierto.

3) Si $\{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una familia de conjuntos cerrados, entonces $\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha$ es un conjunto cerrado.

4) Si $\{C_1,\ldots,C_n\}$ es una colección finita de subconjuntos cerrados, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ es un conjunto cerrado.

Si B es un subconjunto de R y $x_0 \in R$, se dirá que x_0 es un punto de acumulación de B, si existe una sucesión inyectiva de elementos de B, digamos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. Denotaremos por:

$$B' = \{x_0 \in R : x_0 \text{ es punto de acumulación de } B\}.$$

Veamos que $B \subseteq R$ es cerrado si, y sólo si, $B' \subseteq B$. En efecto, consideremos primero $B \subseteq R$ cerrado y supongamos que existe $x_0 \in B'$ tal que $x_0 \notin B$. Entonces, por ser cerrado, $R\backslash B$ es abierto y $x_0 \in R\backslash B$. Por lo tanto existe $\delta \in R$, $\delta > 0$ tal que

$$(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subsetneq R \backslash B.$$

Pero entonces es claro que no puede haber una sucesión de elementos de B que converja hacia x_0, ya que ningún elemento de B puede estar a una distancia de x_0 menor que δ. Esto contradice la suposición $x_0 \in \in B'$.

Luego:

$$B \text{ cerrado} \Rightarrow B' \subseteq B.$$

Supongamos ahora que $B' \subsetneq B$. Hay que demostrar que B es cerrado. Supongamos que B no lo fuese. Entonces $R\backslash B$ no puede ser abierto, y como consecuencia existe un $x_0 \in (R\backslash B)$ tal que si I es cualquier intervalo abierto y $x_0 \in I$, entonces $I \nsubseteq (R\backslash B)$, es decir $I \cap B \neq \phi$.

Luego, para todo $n \in \mathbf{N}$, el conjunto $(x_0 - \frac{1}{n},\ x_0 + \frac{1}{n}) \cap B$ es, necesariamente, infinito (la demostración de este hecho se deja como ejercicio). Ahora se puede construir inductivamente una sucesión de elementos de B del siguiente modo:

Elíjase x_1 como un elemento de $(x_0 - 1,\ x_0 + 1) \cap B$. Entonces se puede encontrar $x_2 \in \left[(x_0 - \frac{1}{2},\ x_0 + \frac{1}{2})\backslash\{x_1\}\right] \cap B$ (ya que $(x_0 - \frac{1}{2},\ x_0 + \frac{1}{2}) \cap \cap B$ es infinito). En general, si se supone que se han elegido $x_1, \ldots, x_n \in \in B$ tales que:

$$|x_i - x_0| < \frac{1}{i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$i, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j,$$

entonces, como $(x_0 - \frac{1}{n+1},\ x_0 + \frac{1}{n+1}) \cap B$ es infinito, se puede elegir un elemento x_{n+1} de $\left[(x_0 - \frac{1}{n+1},\ x_0 + \frac{1}{n+1})\backslash\{x_1, \ldots, x_n\}\right] \cap B$.

De este modo se obtiene una sucesión inyectiva $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de B tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Es decir, x_0 es un punto de acumulación de B. Pero entonces $x_0 \in B' \cap (R\backslash B)$, lo que contradice la suposición de que B' está contenido en B.

Luego:

$$B' \subsetneq B \Rightarrow B \text{ es cerrado.}$$

Un hecho importante relativo a intervalos cerrados es el Principio de Encaje de Cantor, que en este contexto se enuncia del siguiente modo: si $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de intervalos cerrados tal que $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]\ \forall\, n \in \mathbf{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, entonces existe $x_0 \in R$ tal que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{x_0\}$. Este resultado se demuestra fácilmente por medio de sucesiones monótonas.

Sean E un subconjunto de R, $f: E \to R$ una función y $x_0 \in E$. Se dice que f es continua en x_0 si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$x \in E, \ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Otra forma de decir lo mismo es: f es continua en x_0 si, y sólo si, dado cualquier intervalo abierto I tal que $f(x_0) \in I$, existe un intervalo abierto J tal que $x_0 \in J$ y:

$$f(J \cap E) \subseteq I.$$

Esto muestra que f es continua en x_0 si, y sólo si, dado cualquier intervalo abierto I tal que $f(x_0) \in I$, hay un intervalo abierto J tal que:

$$x_0 \in (J \cap E) \subseteq f^{-1}(I).$$

De aquí se obtiene de inmediato que f es continua en x_0 si, y sólo si, dado cualquier conjunto abierto V de R tal que $f(x_0) \in V$, hay un conjunto abierto U de R tal que:

$$x_0 \in (U \cap E) \subseteq f^{-1}(V).$$

Si $E \subseteq R$ y $f: E \to R$ es una función, se dice que f es continua si f es continua en x_0 para todo $x_0 \in E$. Es un ejercicio sencillo el mostrar que $f: E \to R$ es continua si, y sólo si, dado $V \subseteq R$ abierto, existe $U \subseteq R$, también abierto, tal que:

$$(U \cap E) \subseteq f^{-1}(V).$$

Un hecho importante relativo a los conjuntos abiertos es el siguiente: si $U \subseteq R$ es abierto, existe una familia numerable y disjunta de intervalos abiertos, digamos $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$, tal que:

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha.$$

Para probarlo, defínase la siguiente relación en U: si $x, y \in U$, se dice que $x \sim y$, si existe un intervalo abierto J tal que $\{x, y\} \subseteq J \subseteq U$.

Es fácil demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia en U. Por tanto $\sim$ particiona a U en clases de equivalencia. Para cada $x \in U$, denótese por $\bar{x}$ a la clase de equivalencia que contiene a x. Demostraremos que $\bar{x}$ es un intervalo abierto $\forall\ x \in U$. En efecto, sea $x \in U$. Véase primero que $\bar{x}$ es un intervalo; para ello tomemos $a, b \in \bar{x}$, $a < b$. Los casos posibles son los siguientes:

$$b \leq x, \ a < x < b, \ x \leq a.$$

Se tratará sólo el caso $b \leq x$, ya que los otros se tratan de modo similar. Si $a < b \leq x$, por la definición de $\sim$, se tiene $(a, x) \subseteq U$, $(b, x) \subseteq U$, y por tanto:

$$(a, b) \subseteq (a, x) \subseteq U.$$

Luego $\bar{x}$ es un intervalo. Para demostrar que $\bar{x}$ es un intervalo abierto, basta probar que $\bar{x}$ es un conjunto abierto. Pero si $y \in \bar{x}$, resulta que hay un intervalo abierto J_y tal que $\{x, y\} \subseteq J_y \subseteq U$, y es inmediato que, en este caso, $J_y \subseteq \bar{x}$. Por tanto, $\bar{x}$ es un abierto.

Se tiene pues que $\bar{x}$ es un intervalo abierto.

Ahora bien, se sabe que todo intervalo abierto no vacío contiene números racionales, y como Q es enumerable, se sigue que $\{\bar{x} : \bar{x} \in U\}$ también es numerable.

Como además, si $x, y \in U$, entonces o $\bar{x} \cap \bar{y} = \phi$ ó $\bar{x} = \bar{y}$, se tiene que U es la unión de una familia numerable y disjunta de intervalos abiertos.

No es difícil mostrar que si $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ y $\{I_\beta\}_{\beta \in B}$ son dos familias disjuntas y numerables de intervalos abiertos no vacíos tales que:

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha = \bigcup_{\beta \in B} I_\beta,$$

entonces $\{I_\alpha : \alpha \in A\} = \{I_\beta : \beta \in B\}$.

De aquí en adelante se adoptará la siguiente convención: si $U \subseteq R$ es un abierto no vacío, se escribirá $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, donde $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión disjunta de intervalos abiertos. Se entiende que si U es la unión de una familia finita de intervalos abiertos, entonces existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $I_n = \phi$ para todo número natural mayor que n_0 o igual a él. Como, además, si $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ es cualquier otra sucesión disjunta de intervalos abiertos tal que $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, entonces debe verificarse $\{I_n : n \in N\} = \{J_n : n \in N\}$, se dirá que $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ es la única expresión de U como unión numerable y disjunta de intervalos abiertos (aun cuando, como sucesiones, $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ no tienen porqué ser iguales).

Sean ahora E un subconjunto de R y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de abiertos. Diremos que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un cubrimiento abierto de E si:

$$E \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un cubrimiento abierto de E y si $B \subseteq A$ es tal que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in B}$ es también un cubrimiento abierto de E, diremos que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in B}$ es un subcubrimiento de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Sea $C \subseteq R$. Diremos que C es compacto si tiene la siguiente propiedad: $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ cubrimiento abierto de $C \Rightarrow$ existe un subcubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in B}$ de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tal que B es finito.

Ahora se caracterizarán a todos los subconjuntos compactos de R. Para ello se requiere la siguiente noción: se dice que $E \subseteq R$ es acotado si existe $M \in R$, $M \geq 0$, tal que $|x| \leq M \;\forall\; x \in E$.

Teorema. (Heine-Borel-Lebesgue). *Sea $C \subseteq R$. Entonces C es compacto si, y sólo si, C es cerrado y acotado.*

Demostración. Supongamos primero que C es compacto.

Como $\{(-n, n)\}_{n=1}^{\infty}$ es un cubrimiento abierto de C, se tiene que existe un $n_0 \in N$ tal que $C \subseteq (-n_0, n_0)$. Por consiguiente, C tiene que ser acotado.

Veamos que C es cerrado. Para ello demostraremos que $R \setminus C$ es abierto.

Sea $x_0 \in R \setminus C$. En tal caso, para todo $x \in C$, se elige $r_x = \frac{1}{3}|x_0 - x| > 0$. Se tiene entonces que $\{(x - r_x, x + r_x)\}_{x \in C}$ es un cubrimiento abierto de C. Por ser C compacto hay un subconjunto finito de C, digamos $\{x_1, \ldots, x_n\}$, tal que

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i - r_{x_i},\ x_i + r_{x_i}).$$

Sea $r_0 = \min\{r_{x_1}, \ldots, r_{x_n}\}$. Entonces $r_0 > 0$ y es fácil verificar que

$$(x_0 - r_0,\ x_0 + r_0) \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} (x_i - r_{x_i},\ x_i + r_{x_i})\right] = \phi.$$

Por lo tanto, $(x_0 - r_0,\ x_0 + r_0) \subseteq R \setminus C$. Como $x_0 \in (R \setminus C)$ es arbitrario, se tiene que $R \setminus C$ es abierto y por lo tanto C es cerrado.

Supóngase ahora que C es cerrado y acotado. Se debe demostrar que C es compacto.

Obsérvese que por ser C acotado, existen $a, b \in R$, $a < b$, tales que $C \subseteq [a, b]$. Por tanto, basta demostrar que $[a, b]$ es compacto (ya que si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un cubrimiento abierto de C, al agregar $R \setminus C$ a esta familia se obtiene un cubrimiento abierto de $[a, b]$).

Demostraremos, por lo tanto, que si $a, b \in R$, $a < b$, entonces $[a, b]$ es compacto.

Supongamos, pues, que $[a, b]$ no es compacto.

Si $[a, b]$ no es compacto, entonces existe un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $[a, b]$ que no posee un subcubrimiento finito. Puesto que los subintervalos $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ dividen a $[a, b]$ en dos partes iguales y $[a, b] = \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \cup \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, se deduce que no pueden existir subcubrimientos finitos de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ para ambos subintervalos. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que no hay un subcubrimiento finito para $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$. Entonces el mismo argumento nos dice que no pueden existir subcubrimientos finitos de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ para $\left[a, \frac{3a+b}{4}\right]$, $\left[\frac{3a+b}{4}, \frac{a+b}{2}\right]$, subintervalos que dividen a $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ en dos partes iguales. Supongamos que no existe un subcubrimiento finito de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ para $\left[\frac{3a+b}{4}, \frac{a+b}{2}\right]$.

Siguiendo este proceso se encuentra una sucesión de subintervalos cerrados de $[a, b]$, digamos $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, tal que

i) No hay un subcubrimiento finito de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ para $[a_n, b_n]$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

ii) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Por el Principio de Encaje de Cantor, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{x_0\}$. Ahora bien, como $x_0 \in [a, b]$ y $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es un cubrimiento abierto de $[a, b]$, debe existir $\alpha_0 \in A$ tal que $x_0 \in U_{\alpha_0}$. Pero como U_{α_0} es un abierto, existe un $\rho > 0$ tal que $(x_0 - \rho,\ x_0 + \rho) \subseteq U_{\alpha_0}$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, existe $N \in \mathbf{N}$ tal que $b_N - a_N < \rho$. Ahora deducimos de los datos $x_0 \in [a_N, b_N]$, $b_N - a_N < \rho$, que $[a_N, b_N] \subseteq (x_0 - \rho,\ x_0 + \rho) \subseteq U_{\alpha_0}$, lo que implica una contradicción a la propiedad i) de $[a_N, b_N]$, ya que $\{U_{\alpha_0}\}$ es un subcubrimiento finito de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ para $[a_N, b_N]$.

Esto concluye la demostración.

Los subconjuntos compactos de R poseen propiedades muy importantes en relación con las funciones continuas. Una de ellas es la siguiente: si $K \subseteq R$ es compacto y $f: K \to R$ es continua, entonces $f(K)$ es compacto. Éste es un hecho de demostración muy simple que se deja como ejercicio. De aquí deducimos de inmediato que el conjunto imagen de cualquier compacto por cualquier función continua es, necesariamente, un conjunto cerrado y acotado.

Además, si $C \subseteq R$ es compacto y no vacío, entonces, como C es acotado, se tiene que existen inf (C), sup (C).

Se observa que inf $(C) \in C$ y sup $(C) \in C$, lo que es inmediato si C es finito y resulta del hecho que C contiene a todos sus puntos de acumulación (por ser cerrado) si C no es finito. Una consecuencia de esto es el siguiente hecho: si K es un subconjunto compacto y no vacío de R y si $f: K \to R$ es continua, entonces existen x_0 y $x_1 \in K$ tales que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ $\forall\, x \in K$. Para demostrarlo, basta observar que $f(K)$ es compacto y que por lo tanto sup $(f(K)) \in f(K)$, inf $(f(K)) \in f(K)$.

Se definirá ahora lo que se entiende por la recta real completada $\overline{R}$.

Consideremos los símbolos $-\infty$, $+\infty$ (que no son números reales) y defínase el conjunto $\overline{R}$ como:

$$\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Si $x, z \in \overline{R}$, diremos que x es menor que z, $x < z$, si se verifica uno de los siguientes casos:

1) $x, z \in R$ y x es menor que z en el sentido de los números reales.

2) $x = -\infty$, $z \in R$.

3) $x \in R$, $z = +\infty$.

4) $x = -\infty$, $z = +\infty$.

Además se postulará que:

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty \quad \forall\ x \in R$$

$$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty \quad \forall\ x \in R$$

$$\frac{x}{-\infty} = \frac{x}{+\infty} = 0 \qquad \forall\ x \in R$$

$$x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty \text{ si } x \in R,\ x > 0$$

$$x(-\infty) = (-\infty)x = +\infty \text{ si } x \in R,\ x < 0$$

$$x(+\infty) = (+\infty)x = +\infty \text{ si } x \in R,\ x > 0$$

$$x(+\infty) = (+\infty)x = -\infty \text{ si } x \in R,\ x < 0$$

$$(-\infty)(-\infty) = +\infty$$

$$(+\infty)(+\infty) = +\infty.$$

Nótese que no se han definido las siguientes expresiones: $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$, $0 \cdot (+\infty)$, $(+\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (-\infty)$, $(-\infty) \cdot 0$.

Por supuesto que si x e $y \in R$, se entenderá $x + y$ y xy en el sentido usual de los números reales.

$\bar{R}$ con estas convenciones no es un cuerpo.

Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de $\bar{R}$, se dirá que:

i) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $+\infty$, lo que se denotará por $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$, si dado $M \in R$, existe $N \in \mathbf{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow x_n > M.$$

ii) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $-\infty$, lo que se denotará por $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$, si dado $M \in R$, existe $N \in \mathbf{N}$ tal que:

$$n \geq N \Rightarrow x_n < M.$$

Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de $\bar{R}$, se dirá que es monótona creciente si $x_n \leq x_{n+1}$ $\forall$ $n \in N$, y se dirá que es monótona decreciente si $x_{n+1} \leq x_n$ $\forall$ $n \in N$.

Se dirá que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona si es, o bien monótona creciente, o monótona decreciente.

Finalmente obsérvese que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona de elementos de $\bar{R}$, entonces converge hacia un elemento de $\bar{R}$.

1

MEDIDAS INTERIOR Y EXTERIOR, Y CONJUNTOS MEDIBLES LEBESGUE

1.1. MEDIDA INTERIOR

En esta sección se definirá una función $m_* : P(R) \to [0, +\infty]$, que llamaremos "medida interior". Ésta no es la medida que se busca según lo explicado en la introducción, sino un paso para poder llegar a su definición.

Definición 1.1.1. Si I es un intervalo finito, de extremos a y b, $a \leq b$, la longitud de I, $l(I)$, se define por:

$$l(I) = b - a.$$

El paso próximo será ampliar esta noción de longitud.

Definición 1.1.2. Si G es un subconjunto de R abierto, no vacío y acotado, se define la longitud de G, $l(G)$ por:

$$l(G) = \sum_{n=1}^{\infty} l(J_n)$$

donde $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ es la (única) descomposición de G como unión de una colección a lo sumo numerable y disjunta de intervalos abiertos, tal como se ha explicado en la introducción.

Observaciones

1) La longitud del conjunto vacío es 0 (ya que, si $a \in R$, $\phi = (a, a)$).

2) La longitud de un conjunto abierto acotado está bien definida.

3) Si G es un conjunto abierto acotado, resulta $l(G) < \infty$. (Véanse los ejercicios 1 y 2 de este capítulo).

4) Si G_1 y G_2 son dos conjuntos abiertos acotados, y $G_1 \subseteq G_2$, se tiene $l(G_1) \leq l(G_2)$.

5) Si G es un conjunto abierto acotado y $x_0 \in R$, se sigue que $G + x_0$ es un conjunto abierto acotado, y $l(G + x_0) = l(G)$.

Lema 1.1.3. Sean: $G \subseteq R$ un conjunto abierto y $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de intervalos abiertos acotados, tales que $J_n \subseteq J_{n+1}$, $I_n \subseteq I_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$, y

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n = R = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

En tal caso:

$$\lim_{n\to\infty} l(G \cap J_n) = \lim_{n\to\infty} l(G \cap I_n).$$

Demostración. Puesto que $l(G \cap J_n) \leq l(G \cap J_{n+1}) \;\; \forall\, n \in \mathbf{N}$, se tiene que existe $\lim\limits_{n\to\infty} l(G \cap J_n)$ como número real extendido. Del mismo modo se concluye que existe un $\lim\limits_{k\to\infty} l(G \cap I_k)$ (en el mismo sentido).

Ahora bien, sea $n \in \mathbf{N}$. Entonces, $G \cap J_n$ es un conjunto abierto acotado y, por lo tanto, existe $K \in \mathbf{N}$ tal que:

$$G \cap J_n \subseteq G \cap I_K.$$

De aquí se sigue que $G \cap J_n \subseteq G \cap I_k \;\; \forall\, k \in \mathbf{N},\; k \geq K$. Por lo tanto:

$$\exists\, K \in \mathbf{N} \ni l(G \cap J_n) \leq l(G \cap I_k) \quad \forall\, k \in \mathbf{N}, \;\; k \geq K.$$

Por consiguiente:

$$l(G \cap J_n) \leq \lim_{k\to\infty} l(G \cap I_k).$$

Como $n \in \mathbf{N}$ era arbitrario, se concluye que:

$$\lim_{n\to\infty} l(G \cap J_n) \leq \lim_{n\to\infty} l(G \cap I_n).$$

De igual modo se demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} l(G \cap I_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} l(G \cap J_n)$ lo que da el resultado deseado.

Definición 1.1.4. Sean $G \subseteq R$ un conjunto abierto no acotado y $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de intervalos abiertos acotados tal que $I_n \subseteq I_{n+1} \;\; \forall\, n \in \mathbf{N}$ y $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n = R$. Se define entonces la longitud de G, $l(G)$, por:

$$l(G) = \lim_{n\to\infty} l(G \cap I_n).$$

Observaciones

1) La longitud de un conjunto abierto no acotado no depende de la sucesión $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ de intervalos abiertos adoptada en su definición. Ésta es una consecuencia del lema 1.1.3.

2) Si G_1 y G_2 son dos conjuntos abiertos no acotados y $G_1 \subseteq G_2$, se verifica

$$l(G_1) \leq l(G_2).$$

3) Si G es un conjunto abierto no acotado puede suceder que $l(G) = \infty$ (por ejemplo, si $G = (0, \infty)$); pero también puede suceder que $l(G) < \infty$

(por ejemplo, si $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (n - \frac{1}{2n^2}, n + \frac{1}{2n^2})$, entonces $l(G) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < < \infty$).

4) Si G es un subconjunto abierto de R y $x_0 \in R$, se tiene que $G + x_0$ es un conjunto abierto y $l(G + x_0) = l(G)$.

Lema 1.1.5. Si $G \subseteq R$ es un conjunto abierto e I un intervalo abierto acotado, resulta que:

$$l(G \cup I) \leq l(G) + l(I).$$

Demostración. Supóngase primero que G es un conjunto abierto acotado y escríbase $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$, $I = (a, b)$.

Si $G \cap I = \phi$, entonces $G \cup I = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)\right] \cup I$, que es una unión disjunta, a lo sumo numerable, de intervalos abiertos y es acotada; luego, por definición:

$$l(G \cup I) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) + (b - a) = l(G) + l(I).$$

Si $I \subseteq G$ ó $G \subseteq I$, la desigualdad es inmediata en virtud de las observaciones.

Supóngase, pues, $G \cap I \neq \phi$, $I \nsubseteq G$ y $G \nsubseteq I$. Entonces existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $(a_{n_0}, b_{n_0}) \cap I \neq \phi$, y además $I \nsubseteq (a_{n_0}, b_{n_0})$.

Hay tres casos posibles:

i) $a_{n_0} \leq a \leq b_{n_0} < b$.

ii) $a < a_{n_0} < b_{n_0} \leq b$.

iii) $a < a_{n_0} \leq b \leq b_{n_0}$.

Se demostrará solamente el caso i), pues los demás se demuestran de manera similar y, por lo tanto, se los deja como ejercicio.

Sea:

$$B = \{n \in \mathbf{N}: (a_n, b_n) \cap I \neq \phi, n \neq n_0\}.$$

Se tiene:

$$n \in B \Rightarrow b_{n_0} \leq a_n.$$

Si $B = \phi$, entonces:

$$G \cup I = \left[\bigcup_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{\infty} (a_n, b_n)\right] \cup (a_{n_0}, b),$$

lo que constituye una unión a lo sumo numerable y disjunta. Luego, por definición:

$$l(G \cup I) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{\infty} (b_n - a_n) + b - a_{n_0} \le$$

$$\le \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{\infty} (b_n - a_n) + (b - a) + (b_{n_0} - a_{n_0}) \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) + b - a = l(G) + l(I).$$

Si $B \neq \phi$, póngase $c = \sup (\{b_n : n \in B\} \cup \{b\})$. En tal caso, al denotar $B_1 = B \cup \{n_0\}$, se tiene:

$$G \cup I = \left[\bigcup_{\substack{n=1 \\ n \notin B_1}}^{\infty} (a_n, b_n)\right] \cup (a_{n_0}, c),$$

lo que, nuevamente, constituye una unión disjunta y a lo sumo numerable.

Por lo tanto:

$$l(G \cup I) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin B_1}}^{\infty} (b_n - a_n) + c - a_{n_0}.$$

De nuevo es fácil ver que, en efecto

$$l(G \cup I) \le l(G) + l(I).$$

Finalmente, el caso G no acotado se sigue de lo recién demostrado y de la definición de longitud en este caso.

Por inducción se obtiene de inmediato el siguiente corolario.

Corolario 1.1.6. Sean $n \in \mathbf{N}$ e $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ una familia finita de intervalos abiertos y acotados. Entonces:

$$l\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} l(I_k).$$

Ahora se generalizará este resultado.

Teorema 1.1.7. *Sean $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos abiertos de R. Entonces:*

$$l\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} l(G_n).$$

Demostración. Para evitar casos triviales supondremos que todos los G_n son no vacíos. Sea:

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Asúmase primero que G es un conjunto acotado.

En este caso, se tiene $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, donde $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión disjunta de intervalos abiertos acotados. Como $l(G) < \infty$, se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} l(J_n)$ es una serie convergente de números no negativos.

Para cada $n \in \mathbf{N}$, escribamos $G_n = \bigcup_{r=1}^{\infty} I_r^n$, donde $\{I_r^n\}_{r=1}^{\infty}$ es la sucesión disjunta de intervalos abiertos acotados, cuya unión es G_n.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe un $N \in \mathbf{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} (J_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En tal caso

$$l(G) < \sum_{n=1}^{N} l(J_n) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora, para cada $n \in \{1, \ldots, N\}$, sea K_n un intervalo abierto tal que $\bar{K}_n \subseteq J_n$ y $l(J_n) < l(K_n) + \frac{\varepsilon}{2N}$. Entonces:

$$l(G) < \sum_{n=1}^{N} l(K_n) + \varepsilon.$$

Además, la unión $\bigcup_{n=1}^{N} \bar{K}_n$ es un conjunto cerrado y acotado y por lo tanto es compacto. Como este conjunto compacto está contenido en G, se sigue que existe un número finito de los I_r^n que lo cubren, digamos $I_{r_1}^{n_1}, \ldots, I_{r_s}^{n_s}$.

Entonces:

$$\bigcup_{n=1}^{N} \bar{K}_n \subseteq I_{r_1}^{n_1} \cup \ldots \cup I_{r_s}^{n_s}.$$

Como cada $\bar{K}_n$ está contenido en J_n y los J_n son disjuntos de a pares, se tiene que los $\bar{K}_n$ son disjuntos de a pares. Luego:

$$\sum_{n=1}^{N} l(K_n) \leq l(I_{r_1}^{n_1} \cup \ldots \cup I_{r_s}^{n_s}) \leq \sum_{j=1}^{s} l(I_{r_j}^{n_j}).$$

Por tanto:

$$\sum_{n=1}^{N} l(K_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} l(G_n).$$

Por consiguiente:

$$l(G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} l(G_n) + \varepsilon,$$

y, como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se tiene de inmediato que:

$$l(G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} l(G_n).$$

En el caso en que G no es acotado, se deja la demostración como ejercicio.

Teorema 1.1.8. *Sean G_1 y G_2 dos subconjuntos abiertos de R. En tal caso:*

$$l(G_1) + l(G_2) = l(G_1 \cup G_2) + l(G_1 \cap G_2).$$

Demostración. Supóngase primero que G_1 y G_2 son conjuntos abiertos acotados, expresados como unión de un número finito de intervalos abiertos. En este caso se empleará el método de inducción matemática.

Primero supondremos que G_1 es un intervalo abierto (acotado), digamos $G_1 = I = (a, b)$. Sea ahora: $S = \{n \in \mathbf{N} : l(I \cup G_2) + l(I \cap G_2) = l(I) + l(G_2),\ G_2 = \bigcup_{k=1}^{n} I_k,\ \{I_k\}_{k=1}^{n}$ una familia de intervalos, abiertos, acotados y disjuntos$\}$.

Es inmediato que $1 \in S$.

Supongamos pues $n \in S$ y que $G_2 = \bigcup_{i=1}^{n+1} I_i$ (unión disjunta de intervalos abiertos acotados). Se trata de demostrar que:

$$l(I \cup G_2) + l(I \cap G_2) = l(I) + l(G_2).$$

Si $I \cap G_2 = \phi$, entonces:

$$l(I \cup G_2) = l(I) + \sum_{i=1}^{n+1} l(I_i) = l(I) + l(G_2),$$

y por lo tanto se verifica la igualdad.

Supongamos, pues, $I \cap G_2 \neq \phi$, y escribamos $G_2' = \bigcup_{i=2}^{n+1} I_i$. Entonces $I_1 \cap G_2' = \phi$ y $G_2 = I_1 \cup G_2'$, y además:

$$l(I) + l(G_2') + l(I_1) = l(I) + l(G_2).$$

Ahora bien, si $I \cap I_1 \neq \phi$, se sigue que $I \cup I_1$ es un intervalo abierto acotado, y luego, por la hipótesis de inducción, se tiene:

$$\begin{aligned} l(I) + l(I_1) + l(G_2^1) &= l(I \cup I_1) + l(I \cap I_1) + l(G_2^1). \\ &= l(I \cup I_1 \cup G_2^1) + l((I \cup I_1) \cap G_2^1) + l(I \cap I_1). \\ &= l(I \cup G_2) + l(G_2^1 \cap I) + l(I \cap I_1). \end{aligned}$$

Pero, por definición, $l(G_2^1 \cap I) + l(I \cap I_1) = l(G_2 \cap I)$, ya que $G_2 \cap I = \bigcup_{i=1}^{n+1} (I \cap I_i)$, unión disjunta de intervalos abiertos. Luego:

$$l(I) + l(I_1) + l(G_2^1) = l(I \cup G_2) + l(I \cap G_2),$$

y por consiguiente:

$$l(I) + l(G_2) = l(I \cup G_2) + l(I \cap G_2).$$

Si $I \cap I_1 = \phi$, nuevamente por la hipótesis de inducción y observando que $I \cap G_2^1 = I \cap G_2$:

$$\begin{aligned} l(I) + l(G_2^1) + l(I_1) &= l(I \cup G_2^1) + l(I \cap G_2^1) + l(I_1). \\ &= l(I \cup G_2^1) + l(I_1) + l(I \cap G_2). \\ &= l(I \cup G_2^1 \cup I_1) + l(I \cap G_2). \\ &= l(I \cup G_2) + l(I \cap G_2) \end{aligned}$$

y de nuevo obtenemos el resultado deseado.

Por consiguiente, $S = \mathbf{N}$, es decir, si G_1 es un intervalo abierto y acotado y G_2 es una unión finita y disjunta de intervalos abiertos y acotados, entonces

$$l(G_1) + l(G_2) = l(G_1 \cup G_2) + l(G_1 \cap G_2).$$

Valiéndose del mismo método y aplicando lo recién concluido, se demuestra sin mayor dificultad que si G_1 y G_2 son dos conjuntos abiertos, cada uno de los cuales es una unión finita disjunta de intervalos abiertos acotados, entonces:

$$l(G_1) + l(G_2) = l(G_1 \cup G_2) + l(G_1 \cap G_2).$$

Pasemos ahora al caso en que G_1 y G_2 son dos subconjuntos abiertos acotados arbitrarios de R.

Escribamos, pues, $G_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ y $G_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ (uniones disjuntas).

Dado $\epsilon > 0$, elíjase $N \in \mathbf{N}$ tal que:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} l(I_n) < \epsilon, \qquad \sum_{n=N+1}^{\infty} l(J_n) < \epsilon,$$

Lema 1.1.9. Sean G_1 y G_2 dos subconjuntos abiertos acotados de R, y $F \subseteq R$ cerrado tal que $F \subseteq G_1$, $F \subseteq G_2$. Entonces resulta:

$$l(G_1) - l(G_1 \setminus F) = l(G_2) - l(G_2 \setminus F).$$

Demostración. Se sabe que:

$$l(G_1) + l(G_2 \setminus F) = l(G_1 \cup (G_2 \setminus F)) + l(G_1 \cap (G_2 \setminus F)).$$

Pero, como $F \subseteq G_1$, $G_1 \cup (G_2 \setminus F) = G_1 \cup G_2$ y $G_1 \cap (G_2 \setminus F) = (G_1 \cap G_2) \setminus F$, se tiene:

$$l(G_1) + l(G_2 \setminus F) = l(G_1 \cup G_2) + l((G_1 \cap G_2) \setminus F).$$

Del mismo modo:

$$l(G_2) + l(G_1 \setminus F) = l(G_1 \cup G_2) + l((G_1 \cap G_2) \setminus F).$$

Por ser G_1 y G_2 conjuntos abiertos y acotados, la igualdad sigue de inmediato.

Definición 1.1.10. a) Sea $F \subseteq R$, donde F es cerrado y acotado. Se define la longitud de F, $l(F)$, por:

$$l(F) = l(G) - l(G \setminus F),$$

donde G es cualquier conjunto abierto acotado que contiene a F.

b) Sea $F \subseteq R$, donde F es cerrado (y no necesariamente acotado).

Se define la longitud de F, $l(F)$, por:

$$l(F) = \lim_{n \to \infty} (l(F \cap [-n, n])).$$

Observación. De acuerdo con el lema 1.1.9, la longitud de un conjunto cerrado está bien definida en el caso a); y en el caso b), se sigue de que $\{l(F \cap [-n, n])\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona creciente de números reales. Además es claro que si F_1 y F_2 son dos subconjuntos cerrados y $F_1 \subseteq F_2$, resulta $l(F_1) \leq l(F_2)$.

Ahora se está en condiciones de definir la medida interior de cualquier subconjunto de R. Para ello se recurre a la noción de "supremo" de cualquier subconjunto de R en el sentido de que si este subconjunto es acotado superiormente, entonces el "supremo" es la menor de las cotas superiores, y si el subconjunto no es acotado superiormente, su "supremo" es $+\infty$.

Definición 1.1.11. Sea E un subconjunto de R. Se define la medida interior de E, $m_*(E)$ como:

$$m_*(E) = \sup \{l(F) : F \subseteq E,\ F \text{ cerrado}\}.$$

La función $m_* : P(R) \to [0, +\infty]$ así obtenida recibe el nombre de medida interior en R.

Observación. Es claro de esta definición que:

i) $E \subseteq R$, E acotado $\Rightarrow m_*(E) < \infty$.

ii) $E_1, E_2 \in P(R)$, $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow m_*(E_1) \leq m_*(E_2)$.

iii) $E \in P(R)$, E cerrado $\Rightarrow m_*(E) = l(E)$.

iv) Si $E \in P(R)$ y $x_0 \in R$, resulta $m_*(E + x_0) = m_*(E)$.

Veamos ahora algunas propiedades de esta medida interior.

Proposición 1.1.12. Si E_1 y $E_2 \in P(R)$, entonces:

$$m_*(E_1) + m_*(E_2) \leq m_*(E_1 \cup E_2) + m_*(E_1 \cap E_2).$$

Demostración. Si $m_*(E_1) = \infty$ ó $m_*(E_2) = \infty$, todo es trivial.

Luego supondremos $m_*(E_1) < \infty$ y $m_*(E_2) < \infty$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existen subconjuntos cerrados F_1 y F_2 tales que $F_1 \subseteq E_1$ y $F_2 \subseteq E_2$ y

$$m_*(E_1) - \frac{\varepsilon}{2} < l(F_1) \leq m_*(E_1),$$

$$m_*(E_2) - \frac{\varepsilon}{2} < l(F_2) \leq m_*(E_2).$$

Así pues se tiene:

$$m_*(E_1) + m_*(E_2) - \varepsilon < l(F_1) + l(F_2) = l(F_1 \cup F_2) + l(F_1 \cap F_2).$$

(Véase el ejercicio no. 5).

Por lo tanto:

$$m_*(E_1) + m_*(E_2) < l(F_1 \cup F_2) + l(F_1 \cap F_2) + \varepsilon \leq$$

$$\leq m_*(E_1 \cup E_2) + m_*(E_1 \cap E_2) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, la proposición queda demostrada.

Corolario 1.1.13. Sean $E_1, \ldots, E_n \in P(R)$ tales que $E_i \cap E_j = \phi$, $i \neq j$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} m_*(E_i) \leq m_*\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right).$$

Teorema 1.1.14. *Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión disjunta de subconjuntos de R. Entonces:*

$$m_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m_*(E_n).$$

Demostración. Sea $N \in \mathbf{N}$. De acuerdo con el corolario 1.1.13,

$$\sum_{i=1}^{N} m_*(E_i) \leq m_*(\bigcup_{i=1}^{N} E_i).$$

Pero de $\bigcup_{i=1}^{N} E_i \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \;\; \forall N \in \mathbf{N}$, se sigue que

$$m_*(\bigcup_{i=1}^{N} E_i) \leq m_*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n).$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{N} m_*(E_i) \leq m_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \quad \forall N \in \mathbf{N}.$$

1.2. MEDIDA EXTERIOR

Ahora definiremos una función $m^* : P(R) \to [0, \infty]$, llamada "medida exterior" y, más aún, estudiaremos algunas de sus propiedades. Nuevamente, ésta no es la medida buscada, pero juntamente con la medida interior definida en la sección anterior, permitirá definir cuáles serán los conjuntos medibles y cuál será su medida.

Definición 1.2.1. Sea $E \in P(R)$. La medida exterior de E, $m^*(E)$, se define por el número real extendido:

$$m^*(E) = \inf \{ l(G) : G \subseteq R \text{ es abierto y } E \subseteq G \}.$$

La función m^* así definida recibe el nombre de medida exterior en R.

Observaciones

1) Es inmediato que, si $E \in P(R)$ es acotado, entonces $m^*(E) < \infty$.

2) Si E_1 y $E_2 \in P(R)$ y $E_1 \subseteq E_2$, entonces $m^*(E_1) \leq m^*(E_2)$.

3) Si $E \in P(R)$ es abierto, entonces $m^*(E) = l(E)$.

4) Si $E \in P(R)$ y $x_0 \in E$, entonces $m^*(E + x_0) = m^*(E)$.

Proposición 1.2.2. Si E_1 y $E_2 \in P(R)$, se tiene

$$m^*(E_1) + m^*(E_2) \geq m^*(E_1 \cup E_2) + m^*(E_1 \cap E_2).$$

Demostración. Si $m^*(E_1) = \infty$ ó $m^*(E_2) = \infty$ se obtiene, trivialmente, la igualdad. Supongamos, pues, $m^*(E_1) < \infty$, $m^*(E_2) < \infty$ y sea $\epsilon > 0$. Entonces existen conjuntos abiertos G_1 y G_2 tales que $E_1 \subseteq G_1$, $E_2 \subseteq G_2$ y

$$m^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2} > l(G_i), \quad i = 1, 2.$$

Entonces, por el teorema 1.1.8, se tiene:

$$m^*(E_1) + m^*(E_2) + \varepsilon > l(G_1) + l(G_2) = l(G_1 \cup G_2) + l(G_1 \cap G_2).$$

Pero:

$$E_1 \cup E_2 \subseteq G_1 \cup G_2, \quad E_1 \cap E_2 \subseteq G_1 \cap G_2.$$

Por consiguiente:

$$m^*(E_1) + m^*(E_2) + \varepsilon > m^*(E_1 \cup E_2) + m^*(E_1 \cap E_2).$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se obtiene la desigualdad deseada.

Teorema 1.2.3. *Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de R. Entonces:*

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n).$$

Demostración. Si, para algún $n \in \mathbf{N}$, $m^*(E_n) = \infty$, todo es trivial. Por tanto se supondrá que $m^*(E_n) < \infty$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Bajo este supuesto se puede afirmar que, dado $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbf{N}$ existe un conjunto abierto G_n de R tal que $E_n \subseteq G_n$ y $m^*(E_n) < l(G_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Ahora, por el teorema 1.1.7, se tiene $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, y esta última unión es un conjunto abierto, por tanto:

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq l\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} l(G_n) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se tiene la desigualdad que buscábamos.

Ahora es natural preguntarse cuál es la relación entre la medida interior y la medida exterior.

Proposición 1.2.4. Si $E \in P(R)$, resulta $m_*(E) \leq m^*(E)$.

Demostración. Sean $F \subseteq R$ cerrado y $G \subseteq R$ abierto tales que:

$$F \subseteq E \subseteq G.$$

Entonces $l(F) \leq l(G)$ (véase el ejercicio no. 8).

Luego, si $t \in \{l(F) : F \subseteq E,\ F$ cerrado$\}$ y $s \in \{l(G) : E \subseteq G,\ G$ abierto$\}$, se tiene $t \leq s$. Por consiguiente, si $s \in \{l(G) : E \subseteq G,\ G$ abierto$\}$, se tiene $m_*(E) = \sup\{l(F) : F \subseteq E,\ F$ cerrado$\} \leq s$. De aquí es inmediato $m_*(E) \leq m^*(E)$.

Proposición 1.2.5. Si $a, b \in R$, $a < b$, $I = [a, b]$ y $E \subseteq I$, resulta:

$$m^*(E) + m_*(I \setminus E) = b - a.$$

Demostración. Primero obsérvese que, en virtud del problema 9, basta suponer $E \subseteq (a, b)$. Sea, pues, $G \subseteq (a, b)$ un conjunto abierto tal que $E \subseteq G$. Entonces $I \setminus G$ es un conjunto cerrado y es fácil ver que:

$$l(G) + l(I \setminus G) = b - a$$

(véanse los problemas 7 y 8).

Pero, como $E \subseteq G$, se tiene $(I \setminus G) \subseteq (I \setminus E)$. Como consecuencia:

$$l(G) + m_*(I \setminus E) \geq l(G) + l(I \setminus G) = b - a.$$

De aquí, tomando el ínfimo sobre todos los conjuntos abiertos G tales que $E \subseteq G$, se obtiene:

$$m^*(E) + m_*(I \setminus E) \geq b - a.$$

Ahora bien, si $F \subseteq I \setminus E$ es cualquier conjunto cerrado, se obtiene:

$$\begin{aligned} m^*(E) + l(F) &\leq m^*(I \setminus F) + l(F) = \\ &= m^*((a, b) \setminus F) + l(F) \text{ (véase el problema 9)} = \\ &= l((a, b) \setminus F) + l(F) = b - a, \end{aligned}$$

y del mismo modo se obtiene que:

$$m^*(E) + m_*(I \setminus E) \leq b - a,$$

lo que completa la demostración.

1.3. CONJUNTOS MEDIBLES

Por fin estamos en condiciones de definir cuáles son los conjuntos medibles, cuál es su medida y qué propiedades tienen.

Definición 1.3.1. Sea $E \in P(R)$. Se dice que E es medible Lebesgue (o, simplemente, medible), si

$$m^*(E) = m_*(E).$$

Denotaremos por M el conjunto de todos los $E \in P(R)$ que son medibles. Si $E \in M$, se define la medida de E, $m(E)$, por $m(E) = m^*(E) = m_*(E)$. La función $m : M \to [0, \infty]$ recibe el nombre de medida de Lebesgue en R.

Observación. Es claro que ϕ, $R \in M$ y que $m(\phi) = 0$, $m(R) = \infty$. Además es evidente que, si $E \in P(R)$ es tal que $m_*(E) = \infty$, entonces E es medible y $m(E) = \infty$. Además, si $E \in P(R)$, entonces $E \in M$ si, y sólo si, $m_*(E) \geq m^*(E)$. También es claro que si $E \in P(R)$ es tal que $m^*(E) = 0$, entonces E es medible y $m(E) = 0$, y en este caso, todo subconjunto de E es medible y tiene medida cero. Obsérvese además que, si $E \subseteq R$ es medible y si $x_0 \in R$, entonces $E + x_0$ es medible y $m(E + x_0) = m(E)$.

Veamos ahora algunas condiciones que nos permitan asegurar cuándo un subconjunto de R es medible.

Proposición 1.3.2. Sean $a, b \in R$, $a < b$ y $E \subseteq [a, b] = I$. Entonces E es medible si, y sólo si,

$$m^*(E) + m^*(I \setminus E) \leq b - a.$$

Demostración. Sabemos por la proposición 1.2.5 que:

$$m_*(E) + m^*(I \setminus E) = b - a.$$

Si se supone que E es medible, se tiene $m_*(E) = m^*(E)$, de donde:

$$m^*(E) + m^*(I \setminus E) = b - a.$$

Por lo tanto, la condición es necesaria.

Supóngase ahora que:

$$m^*(E) + m^*(I \setminus E) \leq b - a.$$

Entonces, de $m_*(E) + m^*(I \setminus E) = b - a$, se obtiene ahora que:

$$m^*(E) - m_*(E) \leq 0,$$

y por lo tanto, $m^*(E) \leq m_*(E)$, lo que completa la demostración.

Corolario 1.3.3. Si $a, b \in R$, $a < b$, entonces $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ son conjuntos medibles.

Teorema 1.3.4. *Sean $a, b \in R$, $a < b$ y $E \subseteq (a, b)$. Entonces E es medible si, y sólo si, dado $\epsilon > 0$ existen conjuntos abiertos G_1 y G_2 tales que*

$$E \subseteq G_1, \quad ((a, b) \setminus E) \subseteq G_2 \text{ y } l(G_1 \cap G_2) < \epsilon.$$

Demostración. Supóngase primero que E es medible. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existen conjuntos abiertos G_1 y G_2 tales que $E \subseteq G_1$, $((a, b) \setminus E) \subseteq G_2$ y $l(G_1) < m^*(E) + \frac{\epsilon}{2}$, $l(G_2) < m^*((a, b) \setminus E) + \frac{\epsilon}{2}$.

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que G_1 y G_2 son subconjuntos de (a, b). Entonces, en virtud del teorema 1. 1. 8, se tiene:

$$l(G_1 \cap G_2) = l(G_1) + l(G_2) - l(G_1 \cup G_2).$$

Por lo tanto:

$$l(G_1 \cap G_2) < m^*(E) + m^*((a, b) \setminus E) + \epsilon - l(G_1 \cup G_2).$$

Pero $G_1 \cup G_2 = (a, b)$ y, por lo tanto:

$$l(G_1 \cap G_2) < m^*(E) + m^*((a, b) \setminus E) - (b - a) + \epsilon.$$

Pero:

$$m^*(E) = m_*(E),$$

de donde:

$$m^*(E) + m^*((a, b) \setminus E) = m_*(E) + m^*((a, b) \setminus E) \leq$$

$$\leq m_*(E) + m^*([a, b] \setminus E) \leq b - a.$$

Por lo tanto:

$$l(G_1 \cap G_2) < \epsilon.$$

Se concluye que la condición es necesaria.

Ahora supóngase que $E \subseteq (a, b)$ es tal que, dado $\epsilon > 0$, existen conjuntos abiertos G_1 y G_2 tales que $E \subseteq G_1$, $((a, b) \setminus E) \subseteq G_2$ y $l(G_1 \cap G_2) < \epsilon$, G_1 y G_2 contenidos en (a, b).

Entonces, para $\epsilon > 0$, se tiene:

$$m^*(E) + m^*((a, b) \setminus E) \leq l(G_1) + l(G_2) =$$

$$= l(G_1 \cup G_2) + l(G_1 \cap G_2) < b - a + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se tiene que:

$$m^*(E) + m^*((a, b) \setminus E) \leq b - a.$$

Por la proposición 1. 3. 2 (y usando el ejercicio no. 10) se concluye que E es medible.

Corolario 1. 3. 5. Si $a, b \in R$, $a < b$ y $E \subseteq (a, b)$ es un conjunto medible, se sigue que $(a, b) \setminus E$ es medible y

$$m((a, b) \setminus E) = (b - a) - m(E).$$

Demostración. El hecho de ser medible $(a, b) \setminus E$ es claro, ya que la condición del teorema 1. 3. 4 es simétrica con respecto a E y $(a, b) \setminus$
$\setminus E$.

La igualdad que se desea mostrar resulta de que:

$$m^*(E) = m(E) \text{ y } m_*((a,b) \setminus E) = m((a,b) \setminus E).$$

Teorema 1.3.6. *Sean $a, b \in R$, $a < b$. Entonces si G es un subconjunto abierto de R, $G \subseteq (a,b)$, G es medible. Además si F es un cerrado de R, $F \subseteq (a,b)$, entonces F es medible.*

Demostración. Si $G \subseteq (a,b)$ es abierto, entonces $m^*(G) = l(G)$. Ahora bien $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, donde esta última es una unión disjunta de intervalos abiertos. Dado $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbf{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} l(J_n) < \varepsilon$; entonces, para $n = 1, \ldots, N$, elegimos un intervalo abierto K_n tal que $\bar{K}_n \subseteq J_n$ y $l(J_n) < l(K_n) + \frac{\varepsilon}{N}$. Estas condiciones implican que $\bigcup_{n=1}^{N} \bar{K}_n$ es cerrado y que $m^*(G) < l(\bigcup_{n=1}^{N} K_n) + 2\varepsilon$. Luego:

$$m^*(G) < m_*(G) + 2\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se sigue que $m^*(G) \leq m_*(G)$, lo que demuestra que G es medible.

Ahora bien, si F es un subconjunto cerrado de R y $F \subseteq (a,b)$, entonces $(a,b) \setminus F$ es un conjunto abierto contenido en (a,b), y como consecuencia es medible. Pero entonces $(a,b) \setminus [(a,b) \setminus F] = F$ es medible también.

Proposición 1.3.7. Si E_1 y E_2 son subconjuntos medibles y acotados de R, resulta que $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$ son también medibles y:

$$m(E_1) + m(E_2) = m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2).$$

Demostración. Por hipótesis, $m^*(E_i) = m_*(E_i) = m(E_i)$, $i = 1, 2$. Luego, a partir de la proposición 1.1.12 se obtiene:

$$m(E_1) + m(E_2) \leq m_*(E_1 \cup E_2) + m_*(E_1 \cap E_2)$$

y de la proposición 1.2.2:

$$m(E_1) + m(E_2) \geq m^*(E_1 \cup E_2) + m^*(E_1 \cap E_2).$$

Por lo tanto:

$$m^*(E_1 \cup E_2) + m^*(E_1 \cap E_2) = m_*(E_1 \cup E_2) + m_*(E_1 \cap E_2).$$

Como E_1 y E_2 son acotados, todos los términos de esta igualdad son finitos. Luego:

$$[m^*(E_1 \cup E_2) - m_*(E_1 \cup E_2)] + [m^*(E_1 \cap E_2) - m_*(E_1 \cap E_2)] = 0,$$

de donde se saca la conclusión deseada.

Corolario 1.3.8. Si E_1 y E_2 son dos conjuntos medibles y acotados, y si $E_1 \subseteq E_2$, entonces $E_2 \setminus E_1$ es medible y

$$m(E_2 \setminus E_1) = m(E_2) - m(E_1).$$

Demostración. Como E_1 y E_2 son acotados, hay $a, b \in R$, $a < b$, tales que $E_1 \subseteq (a, b)$ y $E_2 \subseteq (a, b)$.

Ahora bien por el corolario 1.3.5 $(a, b) \setminus E_1$ es medible y en virtud de la proposición 1.3.7,

$$E_2 \setminus E_1 = E_2 \cap ((a, b) \setminus E_1)$$

es medible.

Ahora bien, $E_2 = (E_2 \setminus E_1) \cup E_1$ y $E_1 \cap (E_2 \setminus E_1) = \phi$. Por consiguiente y de nuevo por la proposición 1.3.7, se tiene:

$$m(E_2) = m(E_2 \setminus E_1) + m(E_1)$$

y como todas estas cantidades son finitas,

$$m(E_2 \setminus E_1) = m(E_2) - m(E_1).$$

Teorema 1.3.9. *Si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión disjunta de conjuntos medibles, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ es medible y:*

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n).$$

Demostración. Puesto que cada E_n es medible, se tiene:

$$m_*(E_n) = m^*(E_n) = m(E_n) \quad \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Luego, por los teoremas 1.1.14 y 1.2.3, se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \leq m_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n),$$

de donde la conclusión es inmediata.

Corolario 1.3.10. Si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos medibles tal que E_n es acotado y $E_n \subseteq E_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ es medible y $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$.

Demostración. Escríbase $F_1 = E_1$ y $F_{n+1} = E_{n+1} \setminus E_n$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Entonces, por el corolario 1.3.8, se tiene que F_n es medible $\forall\, n \in \mathbf{N}$ y

$$m(F_{n+1}) = m(E_{n+1}) - m(E_n) \quad \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Además, por ser $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión disjunta de conjuntos medibles, se obtiene del teorema 1.3.9 que:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

es medible y que:

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(F_n) = m(E_1) + \sum_{n=2}^{\infty} (m(E_n) - m(E_{n-1}))) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

Corolario 1.3.11. Si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos acotados y medibles de R tal que $E_{n+1} \subseteq E_n \ \forall\, n \in \mathbf{N}$, resulta que $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ es medible y $m(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$.

Demostración. Defínase, para $n \in \mathbf{N}$, $F_n = E_1 \setminus E_n$. En tal caso F_n es medible $\forall\, n \in \mathbf{N}$ y $m(F_n) = m(E_1) - m(E_n)$. Además, $F_n \subseteq F_{n+1} \ \forall\, n \in \mathbf{N}$ y

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_n) = E_1 \setminus (\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n).$$

Luego, por el corolario 1.3.10, $E_1 \setminus (\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)$ es medible y:

$$m(E_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(F_n) = \lim_{n\to\infty} [m(E_1) - m(E_n)].$$

Pero ahora se puede afirmar que $E_1 \setminus (E_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ es medible y, como $m(E_1) < \infty$, se infiere de inmediato el resultado buscado.

Corolario 1.3.12. Si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es cualquier sucesión de subconjuntos medibles de R, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ es medible y $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$. Además, $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ es medible también.

Demostración. Defínase $F_1 = E_1$ y $F_{n+1} = E_n \setminus (\bigcup_{k=1}^{n} E_k) \ \forall\, n \in \mathbf{N}$. Entonces $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión disjunta de conjuntos medibles y, por lo tanto, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ es también medible. Además:

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n).$$

Que $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ es medible se concluye de que:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = (R \setminus \Big[\bigcup_{n=1}^{\infty} (R \setminus E_n)\Big]).$$

Una pregunta que ahora surge de manera natural es la de si hay o no un subconjunto de R que no sea medible Lebesgue. El siguiente ejemplo da una respuesta afirmativa.

Ejemplo. En R se define la relación $\sim$: si x e $y \in R$, diremos que $x \sim y$ si, y sólo si, $x - y \in Q$. Es claro que $\sim$ es una relación de equivalencia en R y, por lo tanto, origina una partición de R en clases de equivalencia.

En primer lugar, obsérvese que si $x \in R$, hay un $s \in (0, 1)$ tal que $x \sim s$.

Ahora se elige un subconjunto E de $(0, 1)$ que contenga exactamente un elemento de cada clase de equivalencia (la existencia de tal E se basa en el Axioma de Selección).

Se afirma que E no es medible. Para justificar esta afirmación es necesario observar antes lo siguiente:

1) Si $x \in (0, 1)$, existe un racional r en $(-1, 1)$ tal que $x \in (E + r)$. Esto es consecuencia de la existencia de un $y \in E$ tal que $x \sim y$, y por lo tanto, haciendo $r = x - y$, se tiene que $x \in (E + r)$.

2) Si $r, s \in Q$, $r \neq s$, entonces $(E + r) \cap (E + s) = \phi$.

En efecto, si suponemos $x \in (E + r) \cap (E + s)$, entonces existen $y, z \in$ $\in E$ tales que $x = y + r$ y $x = z + s$, de donde $y - z = s - r \neq 0$, y por lo tanto, E contendrá dos elementos diferentes de una misma clase de equivalencia, lo que es una contradicción.

Supongamos ahora que E es medible Lebesgue. Entonces $E + r$ es medible Lebesgue $\forall\ r \in Q \cap (-1, 1)$.

Como $Q \cap (-1, 1)$ es enumerable, se sigue que:

$$S = \cup (E + r), \qquad r \in Q \cap (-1, 1)$$

es medible, ya que es la unión de una familia numerable y disjunta de subconjuntos medibles. Como:

$$m(E) = m(E + r) \qquad \forall\ r \in Q \cap (-1, 1),$$

y como $S \subseteq (-1, 2)$, se debe tener que $m(E + R) = 0 \quad \forall\ r \in Q \cap (-1, 1)$ (ya que $m(S) < \infty$), y por lo tanto, $m(S) = 0$.

Pero, por 1) se sabe que $(0, 1) \subseteq S$, concluyendo que $m(S) \geq 1$.

Esta contradicción nació de suponer que E es medible. Luego, E no es medible Lebesgue.

1.4. FUNCIONES MEDIBLES

Definición 1.4.1. Sean $A \subseteq R$ un conjunto medible y $f : A \to R$ una función. Se dice que f es medible si:

$$\alpha \in R \Rightarrow \{x \in A : f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty)) \text{ es un conjunto medible.}$$

Ahora se dará una serie de condiciones equivalentes que establecen que una función es medible.

Proposición 1.4.2. Sean $A \subseteq R$ un conjunto medible y $f : A \to R$ una función. En tal caso los siguientes asertos son equivalentes:

a) f es medible.

b) $\alpha \in R \Rightarrow f^{-1}([\alpha, \infty))$ es medible.

c) $\alpha \in R \Rightarrow f^{-1}((-\infty, \alpha))$ es medible.

d) $\alpha \in R \Rightarrow f^{-1}((-\infty, \alpha])$ es medible.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b). Sea $\alpha \in R$. Entonces:

$$f^{-1}([\alpha, \infty)) = f^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty} (\alpha - \frac{1}{n}, \infty)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((\alpha - \frac{1}{n}, \infty)).$$

Como f es medible, se sigue que $f^{-1}([\alpha, \infty))$ es la intersección de una familia numerable de conjuntos medibles y por tanto es un conjunto medible.

b) $\Rightarrow$ c). Sea $\alpha \in R$. Entonces:

$$(-\infty, \alpha) = R \setminus [\alpha, \infty).$$

Luego:

$$f^{-1}((-\infty, \alpha)) = f^{-1}(R \setminus [\alpha, \infty)) = A \setminus f^{-1}([\alpha, \infty)).$$

Y como A y $f^{-1}([\alpha, \infty))$ son conjuntos medibles, se tiene que $f^{-1}((-\infty, \alpha))$ también lo es.

Las implicaciones restantes se demuestran de manera similar. De esta proposición se deducen los siguientes corolarios cuya demostración es muy sencilla y se deja como ejercicio:

Corolario 1.4.3. Sean $A \subseteq R$ un conjunto medible y $f : A \to R$ una función. Entonces f es medible si, y sólo si, la imagen inversa por f de cualquier intervalo es un conjunto medible.

Corolario 1.4.4. Sean $A \subseteq R$ un conjunto medible y $f : A \to R$ una función. Entonces f es medible si, y sólo si, la imagen inversa por f de cualquier subconjunto abierto de R es un conjunto medible.

Una consecuencia inmediata del corolario 1.4.4 es que toda función real continua definida en un conjunto medible es una función medible.

Definición 1.4.5. Sean $A \subseteq R$ un conjunto medible y $f, g : A \to R$ dos funciones. Diremos que f es igual a g casi en todas partes (c.t.p.), lo que denotaremos por $f = g$ (c.t.p.), si $\{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$ es un conjunto medible cuya medida es cero.

Proposición 1.4.6. Sean $A \subseteq R$ un conjunto medible, $f : A \to R$ una función medible y $g : A \to R$ una función tal que $f = g$ (c.t.p.). En tal caso g es medible.

Demostración. Sea $E = \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$. Entonces E es medible y $m(E) = 0$. Luego todo subconjunto de E es medible (y tiene medida cero).

Sea ahora $\alpha \in R$. Entonces:

$$g^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in A : g(x) > \alpha\} =$$
$$= (\{x \in A : f(x) > \alpha\} \setminus E) \cup \{x \in E : g(x) > \alpha\}.$$

Como cada uno de los conjuntos del último miembro de estas igualdades es medible, se tiene que $g^{-1}((\alpha, \infty))$ es un conjunto medible.

Definición.1.4.7. Sean A un subconjunto de R, $f, g : A \to R$ funciones y $c \in R$. Se definen las funciones $f + c$, cf, $f + g$, $fg : A \to R$, respectivamente, por:

$$(f + c)(x) = f(x) + c \qquad \forall\ x \in A.$$
$$(cf)(x) = c(f(x)) \qquad \forall\ x \in A.$$
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall\ x \in A.$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \forall\ x \in A.$$

Notación. Si A es un subconjunto de R y $f : A \to R$ es una función, denotaremos $f \cdot f$ por f^2.

Teorema 1.4.8. *Sean $A \subseteq R$ un conjunto medible, $f : A \to R$ una función medible y $c \in R$. Entonces las funciones $f + c$, $cf : A \to R$ son funciones medibles.*

Demostración. Veamos primero que $f + c$ es medible. Para ello tómese $\alpha \in R$ y obsérvese que:

$$(f + c)^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in A : (f + c)(x) > \alpha\} =$$
$$= \{x \in A : f(x) + c > \alpha\} =$$
$$= \{x \in A : f(x) > \alpha - c\} =$$
$$= f^{-1}((\alpha - c, \infty)).$$

Luego, como f es medible, $(f + c)^{-1}((\alpha, \infty))$ es un subconjunto medible de A $\forall\ \alpha \in R$. Por tanto $f + c$ es medible.

Considérese ahora cf. Se distinguen tres casos, a saber $c = 0$, $c > 0$ y $c < 0$.

Si $c = 0$, cf es una función idénticamente nula. Luego, si $\alpha \in R$, se tiene:

$$(cf)^{-1}((\alpha, \infty)) = A \quad \text{si } \alpha < 0,$$

$$(cf)^{-1}((\alpha, \infty)) = \phi \quad \text{si } \alpha \geq 0,$$

y se concluye de inmediato que cf es medible.

Si $c > 0$ y $\alpha \in R$, se tiene:

$$\begin{aligned} (cf)^{-1}((\alpha, \infty)) &= \{x \in A : (cf)(x) > \alpha\} = \\ &= \{x \in A : (cf(x) > \alpha\} = \\ &= \{x \in A : f(x) > \tfrac{\alpha}{c}\} = \\ &= f^{-1}((\tfrac{\alpha}{c}, \infty)), \end{aligned}$$

y de nuevo se concluye que cf es medible.

El caso $c < 0$ se demuestra de manera similar.

Teorema 1.4.9. *Sean $A \subseteq R$ un conjunto medible, y $f, g : A \to R$ dos funciones medibles. Entonces las funciones $f + g$, f^2, $fg : A \to R$ también son medibles.*

Demostración. Consideremos primero $f + g$. Para demostrar que $f + g$ es medible recuérdese que el conjunto de los racionales, Q, es enumerable y por lo tanto se puede encontrar una sucesión biyectiva $f : \mathbf{N} \to Q$. Si $n \in \mathbf{N}$, el valor de f en n se denota por r_n. Entonces se puede afirmar que:

$$Q = \{r_n : n \in \mathbf{N}\}.$$

Sea ahora $\alpha \in R$ y obsérvese que si $x \in A$, entonces $f(x) + g(x) > \alpha$ si, y sólo si, existe un racional r_n tal que $f(x) > r_n$ y $r_n > \alpha - g(x)$. Luego:

$$\begin{aligned} (f + g)^{-1}((\alpha, \infty)) &= \{x \in A : f(x) + g(x) > \alpha\} = \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} [\{x \in A : f(x) > r_n\} \cap \{x \in A : \alpha - g(x) < r_n\}] = \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} [f^{-1}((r_n, \infty)) \cap g^{-1}((\alpha - r_n, \infty))]. \end{aligned}$$

Como f y g son funciones medibles, y la intersección de dos conjuntos medibles también es un conjunto medible, se sigue que $(f + g)^{-1}((\alpha, \infty))$ es la unión numerable de conjuntos medibles y, por ende, es un conjunto medible. Luego $f + g$ es una función medible.

Demostremos ahora que f^2 es medible. Sea $\alpha \in R$. Obsérvese primero que si $\alpha < 0$, entonces:

$$(f^2)^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in A : (f(x))^2 > \alpha\} = A.$$

Si $\alpha \in R$, $\alpha \geq 0$, entonces $\sqrt{\alpha}$ y $-\sqrt{\alpha}$ son números reales. Obsérvese que, en este caso:

$$(f^2)^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in A : (f(x))^2 > \alpha\} =$$

$$= \{x \in A : f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in A : f(x) < -\sqrt{\alpha}\} =$$

$$= f^{-1}((\sqrt{\alpha}, \infty)) \cup f^{-1}((-\infty, -\sqrt{\alpha})).$$

Como f es una función medible, se tiene que $(f^2)^{-1}((\alpha, \infty))$ es un conjunto medible $\forall\, \alpha \in R$. Luego f^2 es medible.

Finalmente, para ver que fg es medible basta observar que, por ser f y g medibles, $f + g$ y $f - g$ son medibles según el teorema 1.4.8, y por lo tanto, $(f + g)^2$ y $(f - g)^2$ son medibles según se acaba de demostrar. Pero entonces $\frac{1}{4}[(f + g)^2 - (f - g)^2]$ es una función medible. Un simple cálculo muestra que:

$$fg = \tfrac{1}{4}[(f + g)^2 - (f - g)^2],$$

y se concluye que fg es medible, para finalizar la demostración.

Ahora se presentarán algunos resultados relativos a sucesiones de funciones medibles.

Teorema 1.4.10. *Sean $A \subseteq R$ un conjunto medible y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles de A en R tal que, para todo $x \in A$, la sucesión $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada de números reales. En tal caso las funciones $K, k : A \to R$ definidas por:*

$$K(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbf{N}\} \quad \forall\, x \in A,$$

$$k(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbf{N}\} \quad \forall\, x \in A,$$

son medibles.

Demostración. Sea $\alpha \in R$ y obsérvese que si $x \in A$, entonces $k(x) < \alpha$ si, y sólo si, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $f_n(x) < \alpha$. Luego:

$$k^{-1}((-\infty, \alpha)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((-\infty, \alpha)).$$

Como cada f_n es medible, se sigue que $k^{-1}((-\infty, \alpha))$ es un conjunto medible $\forall\, \alpha \in R$. Por consiguiente, k es una función medible.

El que K sea una función medible es consecuencia de que

$$K^{-1}((\alpha, \infty)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha, \infty)) \quad \forall\, \alpha \in R.$$

Corolario 1.4.11. Sean A un conjunto medible y f_1 y $f_2 : A \to R$ dos funciones medibles. Entonces las funciones $\text{máx}(f_1, f_2)$ y $\text{mín}(f_1, f_2) : A \to R$ definidas por:

$$\text{máx}(f_1, f_2)(x) = \text{máx}\{f_1(x), f_2(x)\} \quad \forall\, x \in A,$$

$$\text{mín}(f_1, f_2)(x) = \text{mín}\{f_1(x), f_2(x)\} \quad \forall\, x \in A,$$

son medibles.

Definición 1.4.12. Sean X un conjunto, y f y g dos funciones de X en R. Se dice que f es mayor que g o igual a ella, o que g es menor que f o igual que ella, lo que se denotará por $f \geq g$ ó $g \leq f$, si $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in X$. Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones de X en R, diremos que es monótona creciente, si $f_n \leq f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbf{N}$, y diremos que es monótona decreciente, si $f_{n+1} \leq f_n$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

Definición 1.4.13. Sean X un conjunto $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de X en R y $f: X \to R$ una función. Se dice que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia f, lo que se denotará por $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, si para todo $x \in X$, se tiene que la sucesión de números reales $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y su límite es $f(x)$.

Definición 1.4.14. Sean $A \subseteq R$ un conjunto medible, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de A en R y $f: A \to R$ una función. Se dice que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia f casi en todas partes, lo que se denotará por $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ (c. t. p.), si existe un subconjunto medible E de A de medida cero tal que, si $x \in A \setminus E$, la sucesión $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y su límite es $f(x)$.

Observación. Si X es un conjunto y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona creciente o monótona decreciente de funciones de X en R, tal que $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada para todo $x \in A$, entonces existe una función $f: X \to R$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. En efecto, si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente, entonces $f(x) = \sup \{f_n(x) : n \in N\}$ $\forall\, x \in X$ es la función que cumple con esta propiedad y si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente, entonces la función requerida es $f(x) = \inf \{f_n(x) : n \in \mathbf{N}\}$ $\forall\, x \in X$.

Sean ahora X un conjunto y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de X en R tal que, para todo $x \in X$, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada de números reales. Para cada $n \in \mathbf{N}$ definamos las funciones K_n y $k_n : X \to R$ por:

$$K_n(x) = \sup \{f_r(x) : r \in N,\ r \geq n\} \quad \forall\, x \in X,$$

$$k_n(x) = \inf \{f_r(x) : r \in N,\ r \geq n\} \quad \forall\, x \in X.$$

Se observa de inmediato que $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona decreciente de funciones de X en R y que $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona creciente, y que si $x \in X$, entonces $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{k_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones acotadas de números reales. Luego, si definimos las funciones $S, s : X \to R$ por:

$$S(x) = \inf \{K_n(x) : n \in \mathbf{N}\} \quad \forall\, x \in X,$$

$$s(x) = \sup \{k_n(x) : n \in \mathbf{N}\} \quad \forall\, x \in X,$$

se tiene que $\lim_{n\to\infty} K_n = S$ y $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

Definición 1.4.15. Las funciones $S, s : X \to R$, que se acaban de obtener se denominan límite superior de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y límite inferior de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, respectivamente. Nos valdremos de las notaciones:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sup f_n, \qquad s = \lim_{n\to\infty} \inf f_n.$$

Proposición 1.4.16. Sean X un conjunto, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de X en R tal que $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada para todo $x \in X$ y $f: X \to R$ una función. Entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f si, y sólo si, $\lim_{n\to\infty} \sup f_n = \lim_{n\to\infty} \inf f_n = f$.

Demostración. Se deja como ejercicio para el lector.

Teorema 1.4.17. *Sean $A \subseteq R$ medible y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles de A en R tal que $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada para todo $x \in A$. Entonces las funciones $\lim_{n\to\infty} \sup f_n$ y $\lim_{n\to\infty} \inf f_n$ son medibles.*

Demostración. Esto es una consecuencia casi inmediata del teorema 1.4.10.

Corolario 1.4.18. Sean $A \subseteq R$ medible, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles de A en R y $f : A \to R$ una función. Entonces, si $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, se tiene que f es medible.

Proposición 1.4.19. Sean $A \subseteq R$ un conjunto medible, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles de A en R y $f : A \to R$ una función. En tal caso, si $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ (c. t. p.), se tiene que f es una función medible.

Demostración. Sea E el subconjunto medible de A, cuya medida es igual a cero tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ \forall\, x \in A \setminus E$.

Para cada $n \in \mathbf{N}$, defínase $g_n : A \to R$ por:

$$g_n(x) = f_n(x) \quad \forall\, x \in A \setminus E$$

$$g_n(x) = 0 \quad \forall\, x \in E,$$

y defínase $g : A \to R$ por:

$$g(x) = f(x) \quad \forall\, x \in A \setminus E$$

$$g(x) = 0 \quad \forall\, x \in E.$$

Por consiguiente se tiene: $g_n = f_n$ (c. t. p.) $\forall\, n \in \mathbf{N}$, y por lo tanto, g_n es medible $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Además, es claro que $\lim_{n\to\infty} g_n = g$. Por consiguiente, g es una función medible. Pero como $g = f$ (c. t. p.), se tiene que f es medible.

Definición 1.4.20. Sean A un conjunto y E un subconjunto de A. Se define la función característica de E, χ_E, como la función $\chi_E : A \to R$ dada por:

$$\chi_E(x) = 1, \quad \text{si } x \in E,$$

$$\chi_E(x) = 0, \quad \text{si } x \in A \setminus E.$$

Definición 1.4.21. Sean A un conjunto y $h : A \to R$ una función. Se dice que h es una función simple, si la imagen de h es un conjunto finito.

Proposición 1.4.22. Sean $A \subseteq R$ un conjunto medible y $h : A \to R$ una función simple. Entonces, si $h(A) = \{x_1, \dots, x_n\}$ y si $A_i = \{x \in A : h(x) = x_i\}$ $i = 1, \dots, n$, se tiene que $h = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}$ y h es medible si, y sólo si, A_i es un conjunto medible $\forall\, i \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración. Se deja la demostración como ejercicio para el lector.

Observación. Con las notaciones de la proposición 1.4.22 se tiene que:

$$i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \phi,$$

$$i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow A_i \neq \phi,$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A.$$

Teorema 1.4.23. *Sean $A \subseteq R$ un conjunto medible y $f : A \to [0, \infty)$ una función medible. Entonces existe una sucesión de funciones simples medibles $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que:*

a) $n \in \mathrm{N} \Rightarrow h_{n+1} \geq h_n$.

b) $\lim_{n \to \infty} h_n = f$.

Demostración. Sea $n \in \mathbf{N}$. Entonces, si $i \in \{1, \dots, n2^n\}$, el conjunto E_{ni} se define por:

$$E_{ni} = f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)\right).$$

Se define ahora:

$$h_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{ni}}.$$

Como f es medible, cada conjunto E_{ni} es medible. Por tanto h_n es una función simple medible, para todo $n \in \mathbf{N}$.

Sean ahora $x \in A$ y $n \in \mathbf{N}$. Si $f(x) \geq n+1$, resulta que $h_n(x) = h_{n+1}(x) = 0$. Si $f(x) \in [n, n+1)$, entonces $h_n(x) = 0$ y $h_{n+1}(x) \geq 0$. Si $f(x) \in [0, n)$, existe $i \in \{1, \ldots, n2^n\}$ tal que $f(x) \in \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)$, de donde $h_n(x) = \frac{i-1}{2^n}$; pero en tal caso debe existir $j \in \{2i-1, 2i\}$ tal que $h_n(x) \in \left[\frac{j-1}{2^{n+1}}, \frac{j}{2^{n+1}}\right)$, de donde $h_{n+1}(x) = \frac{j-1}{2^{n+1}} \geq \frac{2i-1-1}{2^{n+1}} = \frac{i-1}{2^n}$. Por consiguiente, siempre se tiene que $h_{n+1}(x) \geq h_n(x)$. Se deduce como conclusión que la sucesión $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones simples medibles que verifica a).

Veamos ahora b). Para ello obsérvese primero que $h_n \leq f \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$.

Sea $x \in A$. Entonces $f(x) \in [0, \infty)$, y por lo tanto, existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $f(x) \in [0, n_0)$. Se sigue de inmediato que si $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, entonces $h_n(x) \geq f(x) - 2^{-n}$. Luego b) es válido en la sucesión de funciones.

Ejercicios

1) Sean I un intervalo finito y $\{J_n\}_{n=1}^{N}$ una sucesión finita de subintervalos de I tal que, si $k, l \in \{1, \ldots, N\}$, $k \neq l$, se tiene que $J_k \cap J_l = \emptyset$. Demuéstrese que:

$$\sum_{n=1}^{N} l(J_n) \leq l(I).$$

2) Sean I un intervalo finito y $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subintervalos de I tal que, si $n, k \in \mathbf{N}$, $n \neq k$, entonces $J_n \cap J_k = \emptyset$. Demuéstrese que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(J_n) \leq l(I).$$

3) ¿Es verdadero o falso que una unión arbitraria de conjuntos medibles es un conjunto medible?

4) ¿Es cierto que si F es un subconjunto cerrado de R y $l(F) = 0$, entonces $F = \emptyset$?

5) Sean F_1 y F_2 dos subconjuntos cerrados de R. Demuéstrese que:

$$l(F_1) + l(F_2) = l(F_1 \cup F_2) + l(F_1 \cap F_2).$$

6) ¿Es cierto que si E es un subconjunto de R tal que $m_*(E) < \infty$, entonces $m^*(E) < \infty$?

7) Demuéstrese directamente de la definición de medida que si I es un intervalo, entonces $l(I) = m^*(I) = m_*(I)$.

8) Demuéstrese que si F y G son subconjuntos de R, F cerrado y G abierto, tales que $F \subseteq G$, entonces:

$$l(F) + l(G \setminus F) = l(G).$$

9) Si $a \in R$, demuéstrese que $m^*(\{a\}) = m_*(\{a\}) = 0$. ¿Qué conclusión puede obtener el lector respecto a un subconjunto finito de R?

10) Sean $E \subseteq R$ y $a \in R$. Demuéstrese que:

$$m^*(E \cup \{a\}) = m^*(E),$$

$$m_*(E \cup \{a\}) = m_*(E).$$

11) Demuéstrese que un subconjunto E de R es medible si, y sólo si, dado $\varepsilon > 0$, hay subconjuntos abiertos G_1 y G_2 de R tales que $E \subseteq G_1$, $(R \setminus E) \subseteq G_2$ y $l(G_1 \cap G_2) < \varepsilon$.

12) Sean E_1 y E_2 dos subconjuntos medibles de $[0, 1]$. Demuéstrese que:

$$m(E_1) = 1 \Rightarrow m(E_1 \cap E_2) = m(E_2).$$

13) Demuéstrese que hay un subconjunto cerrado E de $[0, 1]$ que no contiene intervalos de longitud positiva, tal que $m(E) > 0$.

14) Sean $a, b \in R$, $a < b$, y $F : [a, b] \to R$ una función derivable. Demuéstrese que la función derivada de F, F', es una función medible.

15) Sean $a, b \in R$, $a < b$. ¿Existe una función $f : [a, b] \to R$ que no sea medible?

16) Sean $A \subseteq R$ medible y $f : A \to R$ una función tal que $r \in Q \Rightarrow f^{-1}((r, \infty))$ es un conjunto medible. Demuéstrese que f es una función medible.

17) Sean $A \subseteq R$ un conjunto medible y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles de A en R. Demuéstrese que el conjunto

$$E = \{x \in A : \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \text{ es convergente}\}$$

es un conjunto medible.

18) Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales no negativos. Demuéstrese que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup a_n \leq 0.$$

19) Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. Demuéstrese que:

$$\lim_{n\to\infty} \sup(-a_n) = -\lim_{n\to\infty} \inf a_n.$$

20) ¿Es verdadero o falso que, si la suma de dos funciones es una función medible, entonces es medible cada una de las funciones sumando?

2

LA INTEGRAL DE LEBESGUE

2.1. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES POSITIVAS

Se está ahora en condiciones de definir la integral de Lebesgue de funciones medibles no negativas. Comenzaremos por definir este concepto en el caso de funciones simples medibles.

Definición 2.1.1. Sean $A \subseteq R$ un conjunto medible y $s: A \to R$ una función simple medible tal que $s(x) \geq 0 \ \forall \ x \in E$. Escribamos $s(A) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y $A_i = \{x \in E : s(x) = \alpha_i\}$. Entonces se define la integral de Lebesgue de s sobre A, $\int_A s \, dm$, por el número real extendido

$$\int_A s \, dm = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(A_i).$$

Ejemplo. Sea $E = [-1, 1]$ y sea $s : E \to R$ la función definida por:

$$s(x) = 5 \ \forall \ x \in [-1, -\tfrac{1}{2}]$$

$$s(x) = 0 \ \forall \ x \in (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]$$

$$s(x) = 2 \ \forall \ x \in (\tfrac{1}{2}, 1].$$

Por consiguiente, s es una función simple no negativa y medible, y se tiene que:

$$\int_{[-1,1]} s \, dm = 5m([-1, -\tfrac{1}{2}]) + 0m((-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]) + 2m((\tfrac{1}{2}, 1]) =$$

$$= 5 \cdot \tfrac{1}{2} + 0 \cdot 1 + 2 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{7}{2}.$$

Veamos ahora algunas propiedades de la integral de funciones simples.

Proposición 2.1.2. Sean $A \subseteq R$ un conjunto medible; s_1, $s_2 : A \to R$ funciones simples, medibles, tales que $s_i(x) \geq 0 \ \forall \ x \in A$, $i = 1, 2$, y $\alpha \in R$, $\alpha \geq 0$. Entonces:

i) $\int_A (\alpha s) dm = \alpha \int_A s_1 dm$,

ii) $\int_A (s_1 + s_2) dm = \int_A s_1 dm + \int_A s_2 dm$.

Demostración. i) Si $\alpha = 0$, entonces $\alpha s_1(x) = 0 \ \forall \ x \in A$, y se concluye que αs_1 es la función constante igual a cero definida en A y el resultado se infiere de inmediato al aplicar la definición 2. 1. 1. Supongamos, pues, $\alpha > 0$.

Puesto que s_1 es una función simple no negativa, cabe decir que

$$s_1(A) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}, \ \alpha_i \geq 0, \ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Entonces $(\alpha s_1)(A) = \{\alpha\alpha_1, \ldots, \alpha\alpha_n\}$, y si se escribe

$$A_i = \{x \in A : s_1(x) = \alpha_i\},$$

se tiene:

$$A_i = \{x \in A : \alpha s_1(x) = \alpha\alpha_i\}.$$

Por lo tanto, aplicando la definición 2. 1. 1:

$$\int_A (\alpha s_1)\mathrm{dm} = \sum_{i=1}^{n} \alpha\alpha_i m(A_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(A_i) = \alpha \int_A s_1 \ \mathrm{dm}.$$

ii) La demostración de ii) es algo más compleja.

Pongamos: $s_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, $s_2 = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$ y $s_1 + s_2 = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \chi_{C_k}$, donde

$s_1(A) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $s_2(A) = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ y $(s_1 + s_2)(A) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_p\}$. En tal caso cabe afirmar que $\{A_i\}_{i=1}^{n}$, $\{B_j\}_{j=1}^{m}$ y $\{C_k\}_{k=1}^{p}$ son sucesiones finitas disjuntas de conjuntos medibles cuyas uniones son iguales a A.

Para cada $k \in \{1, \ldots, p\}$, definamos

$$J_k = \{(i, j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\} : \alpha_i + \beta_j = \gamma_k\}.$$

Es fácil ver que cada J_k es no vacío, que $\bigcup_{k=1}^{p} J_k = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$, que $C_k = \bigcup_{(i,j) \in J_k} A_i \cap B_j$ y que $\{A_i \cap B_j\}_{(i,j) \in J_k}$ es una familia finita y disjunta de conjuntos medibles.

Por lo tanto:

$$m(C_k) = \sum_{(i,j) \in J_k} m(A_i \cap B_j).$$

En consecuencia, se puede afirmar que:

$$\int_A (s_1 + s_2)\mathrm{dm} = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k m(C_k) = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \sum_{(i,j) \in J_k} m(A_i \cap B_j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sum_{(i,j) \in J_k} (\alpha_i + \beta_j) m(A_i \cap B_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i + \beta_j) m(A_i \cap B_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i m(A_i \cap B_j) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta_j m(A_i \cap B_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\sum_{j=1}^{m} m(A_i \cap B_j)) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j (\sum_{i=1}^{n} m(A_i \cap B_j)).$$

Ahora bien, fijemos un $i \in \{1,\ldots,n\}$ arbitrario. En tal caso $\{A_i \cap B_j\}_{j=1}^{m}$ es una familia finita y disjunta de conjuntos medibles, cuya unión es A_i, y por lo tanto:

$$m(A_i) = \sum_{j=1}^{m} m(A_i \cap B_j).$$

Del mismo modo se demuestra que si $j \in \{1,\ldots,m\}$, entonces:

$$m(B_j) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i \cap B_j).$$

Luego, es posible afirmar que:

$$\int_A (s_1 + s_2)\mathrm{dm} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\sum_{j=1}^{m} m(A_i \cap B_j)) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j (\sum_{i=1}^{n} m(A_i \cap B_j)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(A_i) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j m(B_j) = \int_A s_1 \,\mathrm{dm} + \int_A s_2 \,\mathrm{dm},$$

lo que finaliza la demostración.

Definición 2.1.3. Sean A y B dos subconjuntos de R, $B \subseteq A$ y $f : A \to R$ una función. Se define la restricción de f a B, f/B, como la función

$$f/B : B \to R$$

dada por $(f/B)(x) = f(x)\ \forall\ x \in B$.

Observación 2.1.4. Si A y B son medibles, $B \subseteq A$, y si $f : A \to R$ es una función medible, entonces f/B es una función medible, ya que:

$$(f/B)^{-1}((\alpha,\infty)) = f^{-1}((\alpha,\infty)) \cap B\ \forall\ \alpha \in R.$$

Definición 2.1.5. Sean A y B subconjuntos medibles de R, $B \subseteq A$ y $s : A \to R$ una función simple, no negativa y medible. Se define la integral de s sobre B, $\int_B s\,\mathrm{dm}$, por:

$$\int_B s\,\mathrm{dm} = \int_B (s/B)\mathrm{dm}.$$

Proposición 2.1.6. Sean A y B subconjuntos medibles de R, $A \subseteq B$ y s_1, $s_2 : A \to R$ funciones simples medibles y no negativas. Entonces:

a) $s_1 \leq s_2 \Rightarrow \int_A s_1 \, dm \leq \int_A s_2 \, dm$,

b) $\int_B s_1 \, dm \leq \int_A s_1 \, dm$,

c) $\int s_1 \, dm = 0 \Leftrightarrow s_1(x) = 0$ c. t. p. ,

d) $m(A) = 0 \Rightarrow \int_A s_1 \, dm = 0$.

La demostración de esta proposición es muy sencilla y se la deja como ejercicio al lector.

Definición 2. 1. 7. Sean: $A \subseteq R$ un conjunto medible y $f : A \to R$ una función medible y no negativa. Se define la integral de Lebesgue de f sobre A, $\int_A f \, dm$, por:

$$\int_A f \, dm = \sup \{ \int_A s \, dm : s \in S \},$$

donde S es el conjunto de todas las funciones simples no negativas definidas en A que son menores a f o iguales a ella.

Si $B \subseteq A$ es un conjunto medible, se define $\int_B f \, dm = \int_B (f/B) \, dm$.

Observación 2. 1. 8. Si A es un subconjunto medible de R y $s : A \to R$ es una función simple no negativa, se tienen dos definiciones de $\int s \, dm$. Sin embargo, que ambas coincidan, es consecuencia de la proposición 2. 1. 6. a).

Ahora que conocemos la definición de la integral de Lebesgue de funciones no negativas y medibles, es necesario discurrir las propiedades de esta integral que permitan no sólo obtener información teórica sobre el comportamiento de la integral sino también integrar funciones concretas.

Proposición 2. 1. 9. Sean A y B subconjuntos medibles de R, $B \subseteq A$, f_1 y $f_2 : A \to R$ funciones medibles no negativas y $\alpha \in R$, $\alpha \geq 0$. Entonces:

a) $f_1 \leq f_2 \Rightarrow \int_A f_1 \, dm \leq \int_A f_2 \, dm$.

b) $\int_B f_1 \, dm \leq \int_A f_1 \, dm$.

c) $\int_A (\alpha f_1) \, dm = \alpha \int_A f_1 \, dm$.

d) $\int_A f_1 \, dm = 0 \Leftrightarrow f_1(x) = 0$ c. t. p.

e) $m(A) = 0 \Rightarrow \int_A f_1 \, dm = 0.$

Esta proposición es una consecuencia casi inmediata de la proposición 2. 1. 6 y su demostración formal queda como ejercicio.

Una de las características más importantes de la integral de Lebesgue es la facilidad en el manejo de las operaciones de límite. Uno de los teoremas fundamentales a este respecto es el siguiente:

Teorema 2. 1. 10. (Teorema de Convergencia Monótona de Lebesgue). *Sean $A \subseteq R$ un conjunto medible, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas definidas en A y $f : A \to R$ una función. Supóngase que:*

a) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \ \forall\, x \in A, \ \forall\, n \in \mathbf{N}.$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), \ \forall\, x \in A.$

Entonces:

$$\int_A f \, dm = \lim_{n \to \infty} \int_A f_n \, dm.$$

Demostración. La hipótesis b) implica, en virtud del corolario 1. 4. 18, que f es medible. Como $f_n(x) \geq 0, \ \forall\, x \in A, \ \forall\, n \in \mathbf{N}$, se tiene que $f(x) \geq 0 \ \forall\, x \in A$. Luego $\int_A f \, dm$ está definida. Además, como $f_n(x) \leq$ $\leq f_{n+1}(x) \ \forall\, x \in A, \ \forall\, n \in \mathbf{N}$, se tiene que: $\int_A f_n \, dm \leq \int_A f_{n+1} \, dm, \ \forall\, n \in \mathbf{N}.$

Luego $\{\int_A f_n \, dm\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona creciente de números reales extendidos no negativos, y por consiguiente, es convergente a un número real extendido no negativo, digamos α.

Además, como $f_n(x) \leq f(x), \ \forall\, x \in A, \ \forall\, n \in \mathbf{N}$, se tiene que

$$\int_A f_n \, dm \leq \int_A f \, dm, \ \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Por consiguiente:

$$\alpha \leq \int_A f \, dm.$$

Sea $s : A \to R$ cualquier función simple no negativa tal que

$$s(x) \leq f(x), \ \forall\, x \in A.$$

Fijemos $c \in (0, 1)$ y, para cada $n \in \mathbf{N}$, definamos:

$$E_n = \{x \in A : f_n(x) \geq cs(x)\}.$$

Es claro que E_n es medible para cada $n \in \mathbf{N}$, que $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_n \subseteq \subseteq E_{n+1} \subseteq \ldots$, y que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = A$. Además, en virtud del ejercicio 5 de este capítulo, se tiene que:

$$c\int_A s \, dm = \int_A (cs) \, dm = \lim_{n \to \infty} \int_{E_n} (cs) \, dm.$$

Pero también ocurre que si $n \in \mathbf{N}$:

$$\int_A f_n \, dm \geq \int_{E_n} f_n \, dm \geq \int_{E_n} cs \, dm = c\int_{E_n} s \, dm.$$

Luego, al operar con límites, se tiene:

$$\alpha \geq c(\int_A s \, dm).$$

Como s era arbitraria a más de ser simple, no negativa, y $s(x) \leq \leq f(x) \ \forall \ x \in A$, cabe decir, valiéndose de la definición de $\int_A f \, dm$, que:

$$\alpha \geq c\int_A f \, dm.$$

Ahora, como $c \in (0, 1)$ es arbitrario, se puede afirmar que:

$$\alpha \geq \sup\{c\int_A f \, dm : c \in (0, 1)\} = \int_A f \, dm.$$

Esto finaliza la demostración.

Observación 2.1.11. Consecuencia inmediata del teorema 2.1.10 es que si $A \subseteq R$ es medible, $f : A \to R$ es una función medible no negativa y $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones simples medibles definidas en A, tal que $s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \ \forall \ x \in A$, $\forall \ x \in A$, $\forall \ n \in \mathbf{N}$ y $\lim_{n \to \infty} s_n(x) = f(x) \ \forall \ x \in A$, entonces $\lim_{n \to \infty} \int_A s_n \, dm = \int_A f \, dm$. Dado que la existencia de una tal sucesión de funciones simples la garantiza el teorema 1.4.23, esto permite tener un nuevo punto de vista respecto de la definición de la integral de Lebesgue de funciones medibles no negativas y además tener una herramienta que en algunos casos permite computar el valor de la integral. Un ejemplo muy sencillo es el siguiente:

Ejemplo 2.1.12. Sean $A = [0, 1]$ y $f : A \to R$ la función dada por $f(x) = = x \ \forall \ x \in A$.

Para cada $n \in \mathbf{N}$, definamos $s_n : A \to R$ por:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \cdot \chi_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})}.$$

Es fácil ver que $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones simples medibles tal que:

$$s_n(x) \leq s_{n+1}(x), \quad \forall\, x \in A, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x), \quad \forall\, x \in A.$$

Además:

$$\int_A s_n\, dm = \int_A \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \cdot \chi_{[\frac{k}{n},\, \frac{k+1}{n})}\, dm =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n}{2}.$$

Por tanto

$$\int_A s_n\, dm = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \quad \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Se concluye, pues, que:

$$\int_A f\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_A s_n\, dm = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2}.$$

En los ejercicios se verán otros ejemplos referentes a la computación de integrales.

El teorema 2. 1. 10 permite además obtener la siguiente conclusión:

Teorema 2. 1. 13. *Sean $A \subseteq R$ medible y $f_1, f_2 : A \to R$ funciones medibles no negativas. Entonces:*

$$\int_A (f_1 + f_2)\, dm = \int_A f_1\, dm + \int_A f_2\, dm.$$

Demostración. Se sabe, por la observación 2. 1. 11, que existen sucesiones $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples no negativas tales que:

$$s_n(x) \leq s_{n+1}(x), \quad t_n(x) \leq t_{n+1}(x) \quad \forall\, x \in A, \quad \forall\, n \in \mathbf{N},$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f_1(x), \quad \lim_{n\to\infty} t_n(x) = f_2(x) \quad \forall\, x \in A.$$

Luego:

$$\lim_{n\to\infty} \int_A s_n\, dm = \int_A f_1\, dm, \quad \lim_{n\to\infty} \int_A t_n\, dm = \int_A f_2\, dm.$$

Ahora bien:

$$(s_n + t_n)(x) \leq (s_{n+1} + t_{n+1})(x) \quad \forall\, x \in A, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

$$\lim_{n\to\infty} (s_n + t_n)(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad \forall\, x \in A.$$

Luego, por el teorema 2. 1. 10:

$$\begin{aligned}\int_A (f_1 + f_2)\, dm &= \lim_{n\to\infty} \int_A (s_n + t_n)\, dm = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_A s_n\, dm + \int_A t_n\, dm\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_A s_n\, dm + \lim_{n\to\infty} \int_A t_n\, dm = \\ &= \int_A f_1\, dm + \int_A f_2\, dm.\end{aligned}$$

2.2. FUNCIONES INTEGRABLES

Ahora se está en condiciones de definir cuándo una función medible arbitraria es integrable Lebesgue.

Definición 2.2.1. Sean A un subconjunto de R y $f : A \to R$ una función.

Denotemos por 0 a la función constante definida en A y cuyo valor es 0 en cada punto. Bajo estas condiciones se definen:

i) $f_+ : A \to R$ por $f_+ = \text{máx}\,(f, 0)$.

ii) $f_- : A \to R$ por $f_- = -\min\,(f, 0)$.

iii) $|f| : A \to R$ por $|f|(x) = |f(x)| \quad \forall\, x \in A$.

Observación 2.2.2. Se sigue de la definición 2. 2. 1 que:

$$f = f_+ - f_-$$

$$|f| = f_+ + f_-$$

$$f_+(x) \geq 0, \quad f_-(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in A.$$

Además, si A es un conjunto medible y f es una función medible, en virtud del corolario 1. 4. 11, f_+ y f_- son funciones medibles y, por consiguiente, $|f|$ es una función medible.

Definición 2.2.3. Sean A un subconjunto medible de R y $f : A \to R$ una función medible. Se dice que f es una función integrable Lebesgue (o, simplemente, integrable) si

$$\int_A |f|\, dm < \infty.$$

En este caso, se define la integral de Lebesgue de f, $\int_A f\,dm$, así:

$$\int_A f\,dm = \int_A f_+\,dm - \int_A f_-\,dm.$$

Observación 2.2.4. Si A es un conjunto medible y $f : A \to R$ es una función integrable Lebesgue, entonces, debido a que $f_+ \le |f|$, $f_- \le |f|$, se sigue que la integral de f está bien definida. Además, si $f : A \to R$ es una función medible no negativa, resulta que decir que f es integrable significa que

$$\int_A f\,dm < \infty.$$

Una propiedad muy importante de la integral es la siguiente:

Teorema 2.2.5. *Sean A un subconjunto medible de R y $f : A \to R$ una función integrable. Entonces:*

$$\left|\int_A f\,dm\right| \le \int_A |f|\,dm.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\left|\int_A f\,dm\right| &= \left|\int_A f_+\,dm - \int_A f_-\,dm\right| \le \\ &\le \left|\int_A f_+\,dm\right| + \left|\int_A f_-\,dm\right| = \\ &= \int_A f_+\,dm + \int_A f_-\,dm = \int_A (f_+ + f_-)\,dm = \\ &= \int_A |f|\,dm.\end{aligned}$$

Con referencia a las propiedades algebraicas de la integral de Lebesgue cabe decir:

Teorema 2.2.6. *Sean A un subconjunto medible de R, f_1, $f_2 : A \to R$ funciones integrables y $\alpha \in R$. Entonces:*

i) $f_1 + f_2 : A \to R$ es integrable y

$$\int_A (f_1 + f_2)\,dm = \int_A f_1\,dm + \int_A f_2\,dm.$$

ii) $\alpha f_1 : A \to R$ es integrable y:

$$\int_A (\alpha f_1)\,dm = \alpha \int_A f_1\,dm.$$

Demostración. i) Primero obsérvese que:

$$|f_1 + f_2| \le |f_1| + |f_2|.$$

De aquí se concluye de inmediato que $f_1 + f_2$ es integrable.

Para demostrar la igualdad deseada, adviértase que:

$$f_1 + f_2 = f_{1+} - f_{1-} + f_{2+} - f_{2-}.$$

Luego, si se pone $g = f_1 + f_2$, se tiene:

$$g_+ - g_- = f_{1+} + f_{2+} - f_{1-} - f_{2-},$$

de donde:

$$g_+ + f_{1-} + f_{2-} = f_{1+} + f_{2+} + g_-.$$

Como hay sólo funciones no negativas en ambos lados cabe decir que:

$$\int_A g_+ \,dm + \int_A f_{1-} \,dm + \int_A f_{2-} \,dm = \int_A f_{1+} \,dm + \int_A f_{2+} \,dm + \int_A g_- \,dm,$$

y como todos los sumandos son números reales, se obtiene:

$$\int_A g_+ \,dm - \int_A g_- \,dm = \left(\int_A f_{1+} \,dm - \int_A f_{1-} \,dm\right) + \left(\int_A f_{2+} \,dm - \int_A f_{2-} \,dm\right).$$

Luego:

$$\int_A (f_1 + f_2) \,dm = \int_A f_1 \,dm + \int_A f_2 \,dm.$$

ii) Para demostra esta parte, obsérvese que todo es trivial, si $\alpha =$ $= 0$. Supongamos, pues, $\alpha \neq 0$. Si $\alpha > 0$, entonces:

$$(\alpha f_1)_+ = \alpha f_{1+}$$

$$(\alpha f_1)_- = \alpha f_{1-}$$

de donde se concluye de inmediato lo deseado. Si $\alpha < 0$, entonces:

$$(\alpha f_1)_+ = (-\alpha) f_{1-}$$

$$(\alpha f_1)_- = (-\alpha) f_{1+},$$

y de nuevo se concluye lo requerido.

2.3. SUCESIONES DE FUNCIONES INTEGRABLES Y TEOREMAS DE CONVERGENCIA

Una de las características más notables e importantes de la integral de Lebesgue es la facilidad con que maneja las operaciones de límite. Ya hemos visto el Teorema de Convergencia Monótona de Lebesgue, el cual es un resultado muy importante.

Teorema 2.3.1. (Lema de Fatou). *Sean $A \subseteq R$ un conjunto medible y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones reales no negativas definidas en A. Entonces:*

$$\int_A (\lim_{n\to\infty} \inf f_n)\mathrm{dm} \le \lim_{n\to\infty} \inf \int_A f_n \, \mathrm{dm}.$$

Observación. Aquí se considera la integral de funciones no negativas definida en la sección 2. 1.

Demostración. Recuérdese que si definimos para cada $n \in \mathbf{N}$ la función $k_n : A \to R$ mediante:

$$k_n(x) = \inf \{f_r(x) : r \in \mathbf{N},\ r \ge n\} \quad \forall\, x \in A,$$

entonces $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona creciente de funciones medibles y

$$\lim_{n\to\infty} k_n(x) = (\lim_{n\to\infty} \inf f_n)(x) \quad \forall\, x \in A.$$

Además, como cada f_r es una función no negativa, se tiene que:

$$k_n(x) \ge 0 \quad \forall\, x \in A.$$

Luego, por el Teorema de Convergencia Monótona se tiene que:

$$\int_A (\lim \inf f_n) \, \mathrm{dm} = \lim_{n\to\infty} \int_A k_n \, \mathrm{dm}.$$

Ahora obsérvese que, si $n \in \mathbf{N}$:

$$k_n(x) \le f_n(x) \quad \forall\, x \in A.$$

Luego:

$$\int_A k_n \, \mathrm{dm} \le \int_A f_n \, \mathrm{dm} \quad \forall\, n \in \mathbf{N},$$

de donde se concluye que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_A k_n \, \mathrm{dm} = \lim_{n\to\infty} \inf \int_A k_n \, \mathrm{dm} \le \lim_{n\to\infty} \inf \int_A f_n \, \mathrm{dm},$$

y se obtiene así la desigualdad deseada.

Teorema 2. 3. 2. (Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue). *Sean $A \subseteq R$ un conjunto medible, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones reales medibles definidas en A, tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe como número real para todo $x \in A$,* y *$g : A \to R$ una función integrable tal que para todo $n \in \mathbf{N}$ se tiene:*

$$|f_n(x)| \le g(x) \quad \forall\, x \in A.$$

Entonces, si definimos $f : A \to R$ por:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall\, x \in A,$$

se tiene que f es integrable y que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |f_n - f| \, dm = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, dm = \int_A f \, dm.$$

Demostración. Se sabe que f es una función medible, ya que es el límite de una sucesión de funciones medibles. Además, como g es integrable y $|f_n| \le g \ \forall\, n \in \mathbf{N}$, se sigue que f_n es integrable para todo $n \in \mathbf{N}$ y que f es integrable, puesto que:

$$|f_n| \le g \ \forall\, n \in \mathbf{N} \Rightarrow |f| \le g.$$

Además, obsérvese que:

$$|f_n - f| \le |f_n| + |f| \le 2g \ \ \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Luego, si $n \in \mathbf{N}$, la función $2g - |f_n - f|$ es una función medible no negativa y se puede aplicar el Lema de Fatou a la sucesión $\{2g - |f_n - f|\}_{n=1}^{\infty}$ se concluye que:

$$\begin{aligned}
\int_A 2g \, dm &= \int_A \lim_{n\to\infty} (2g - |f_n - f|) \, dm = \\
&= \int_A \lim_{n\to\infty} \inf \, (2g - |f_n - f|) \, dm \le \\
&\le \lim_{n\to\infty} \inf \int_A (2g - |f_n - f|) \, dm = \\
&= \int_A 2g + \lim_{n\to\infty} \inf \left(-\int_A |f_n - f| \, dm\right) = \\
&= \int_A 2g - \lim_{n\to\infty} \sup \int_A |f_n - f| \, dm,
\end{aligned}$$

(véase el ejercicio no. 19, capítulo 1).

Luego, $\lim_{n\to\infty} \sup \int_A |f_n - f| \, dm \le 0$ y se concluye que $\lim_{n\to\infty} \int_A |f_n - f| \, dm = 0$ (véase el ejercicio no. 18, capítulo 1). Queda así demostrado el primer límite en la tesis del Teorema; para demostrar el segundo límite, recuérdese que:

$$\left|\int_A (f_n - f) \, dm\right| \le \int_A |f_n - f| \, dm \ \ \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

De esta desigualdad se concluye de inmediato que:

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \left|\int_A (f_n - f) \, dm\right| \le \lim_{n\to\infty} \int_A |f_n - f| \, dm = 0$$

y luego:

$$\lim_{n\to\infty} \int_A (f_n - f)\mathrm{dm} = 0,$$

y resulta que:

$$\int_A f\,\mathrm{dm} = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\,\mathrm{dm}.$$

Ejercicios

1) Sean A y B dos subconjuntos medibles de R y $f : A \to R$ una función integrable Lebesgue. Demuéstrese que:

$$\int_B f\,\mathrm{dm} = \int_A (\chi_B f)\mathrm{dm}.$$

2) Demuéstrese la proposición 2. 1. 6.

3) Demuéstrese la conclusión de la observación 2. 1. 8.

4) Demuéstrese la proposición 2. 1. 9.

5) Sean $A \subseteq R$ un conjunto medible, $s : A \to R$ una función simple medible y no negativa, $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos medibles de A tal que $E_n \subset E_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = A$. Demuéstrese, sin recurrir al teorema 2. 1. 10 que: 57

$$\int_A s\,\mathrm{dm} = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} s\,\mathrm{dm}.$$

6) Verifíquense los detalles del ejemplo 2. 1. 12.

7) Sean $a, b \in R$, $a < b$ y $f : [a, b] \to R$ una función continua. Demuéstrese que f es integrable Lebesgue.

8) Sean $A \subseteq R$ un conjunto medible y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas. Supóngase que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es convergente en R para todo $x \in A$ y defínase $f : A \to R$ por:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \forall\, x \in A.$$

Demuéstrese que F es una función medible no negativa y que:

$$\int_A f\,\mathrm{dm} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n\,\mathrm{dm}.$$

9) Demuéstrese que si $f : [0, 1] \to R$ es la función $f(x) = x^2$ $\forall\, x \in [0, 1]$, entonces $\int_{[0,1]} f\,\mathrm{dm} = \frac{1}{3}$.

10) Sea $f : [0, 1] \to R$ la función $f(x) = x^2 - 3x + 5$. Demuéstrese que

$$\int_{[0,1]} f \, dm = \frac{23}{6}.$$

Compárese este resultado con $\int_{[0,1]} |f| \, dm$.

11) Para cada $n \in \mathbf{N}$, defínase $f_n : [0, 1] \to R$ mediante $f_n(x) = x^n \ \forall \ x \in [0, 1]$. Demuéstrese que:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{[0,1]} f_n \, dm = 0.$$

12) Sea $f : [0, 1] \to R$ una función medible tal que $|f(x)| < 1$ c. t. p. Demuéstrese que:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{[0,1]} f^n \, dm = 0.$$

13) Considérese la función $f : [0, \infty) \to R$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$. Demuéstrese que f no es integrable Lebesgue sobre $[0, \infty)$.

14) Sea $f : R \to R$ una función medible. Demuéstrese que f es integrable Lebesgue sobre R sí, y sólo si:

58

$$\lim_{n \to \infty} \int_{[-n,n]} |f| \, dm < +\infty.$$

15) Defínase $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ mediante

$$f(0) = 0$$
$$f(x) = 1, \text{ si } x \text{ es irracional}$$
$$f(x) = \frac{1}{q}, \text{ si } x = \frac{p}{q},$$

donde p, q son números naturales relativamente primos.

Demuéstrese que f es integrable Lebesgue sobre $[0, 1]$ y calcúlese

$$\int_{[0,1]} f \, dm.$$

16) Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\beta > 0$ y defínase $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ mediante

$$f(0) = 0$$
$$f(x) = x^\alpha \operatorname{sen}(x^\beta) \quad x \in [0, 1].$$

¿Para cuáles valores de α resulta f ser integrable Lebesgue sobre $[0, 1]$?

3

COMPARACIÓN DE LA INTEGRAL DE LEBESGUE CON LA INTEGRAL DE RIEMANN

3.1. INTEGRAL DE RIEMANN

En esta sección se definirá la integral de Riemann, que es la considerada en los cursos elementales de cálculo.

Definición 3.1.1. Sea I un intervalo acotado de números reales y sea $f: I \to R$ una función acotada (es decir, f es una función cuya imagen es un conjunto acotado). Se define $M[f;I]$, $m[f;I]$ y $\omega[f;I]$ por:

$$M[f;I] = \sup \{f(x) : x \in I\}$$

$$m[f;I] = \inf \{f(x) : x \in I\}$$

$$\omega[f;I] = M[f;I] - m[f;I].$$

Si $a \in I$, se define $\omega[f;a]$ por:

$$\omega[f;a] = \inf \{\omega[f; J \cap I] : J \text{ es un intervalo abierto y } a \in J\}.$$

Observación 3.1.2. Un ejercicio sencillo es demostrar que si I es un intervalo acotado, $f: I \to R$ una función acotada y $a \in I$, entonces:

i) $\omega[f;a] = 0 \Leftrightarrow f$ es continua en a.

ii) f no continua en $a \Rightarrow \omega[f;a] > 0$.

Definición 3.1.3. Sean $a, b \in R$, $a < b$. Una subdivisión de $[a,b]$ es un subconjunto finito $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ tal que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Si σ y τ son dos subdivisiones de $[a,b]$, se dice que τ es un refinamiento de σ, si $\sigma \subseteq \tau$.

Si $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una subdivisión de $[a,b]$, entonces los intervalos cerrados $I_1 = [x_0, x_1]$, $I_2 = [x_1, x_2]$, $\ldots$, $I_n = [x_{n-1}, x_n]$ se denominan intervalos componentes de σ.

Definición 3.1.4. Sean $a, b \in R$, $a < b$, $f: [a,b] \to R$ una función acotada y σ una subdivisión de $[a,b]$ con intervalos componentes $I_1, \ldots, I_n$. Se define la suma superior de f correspondiente a σ, $S[f;\sigma]$, por:

$$S[f:\sigma] = \sum_{i=1}^{n} M[f;I_i] l(I_i),$$

donde $l(I_i)$ es la longitud del intervalo componente I_i.

De manera similar se define la suma inferior de f correspondiente a σ, $s[f;\sigma]$, por

$$s[f;\sigma] = \sum_{i=1}^{n} m[f;I_i]\,l(I_i).$$

Observación 3.1.5. Es claro que, en las condiciones de la definición 3.1.4, se tiene que $s[f;\sigma] \le S[f;\sigma]$. Además, obsérvese que si se definen las funciones simples S_σ, $s_\sigma : [a,b] \to R$ por:

$$S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} M[f;I_i]\,\chi_{[x_{i-1},x_i)}$$

$$s_\sigma = \sum_{i=1}^{n} m[f;I_i]\,\chi_{[x_{i-1},x_i)},$$

entonces S_σ y s_σ son integrables Lebesgue y:

$$S[f;\sigma] = \int_{[a,b]} S_\sigma \,\mathrm{dm}.$$

$$s[f;\sigma] = \int_{[a,b]} s_\sigma \,\mathrm{dm}.$$

Lema 3.1.6. Sean $a, b \in R$, $a < b$, $f: [a,b] \to R$ una función acotada y σ y τ dos subdivisiones de $[a,b]$. Entonces:

$$s[f;\tau] \le S[f;\sigma].$$

Demostración. Primero se demostrará que, si σ^* es cualquier refinamiento de σ, resulta:

$$S[f;\sigma] \ge S[f;\sigma^*],$$

$$s[f;\sigma] \le s[f;\sigma^*].$$

Para demostrarlo, basta suponer que σ^* sólo posee un elemento más que σ, ya que el resultado general se obtiene entonces por inducción matemática. Supondremos, por lo tanto, que σ posee intervalos componentes $I_1, \ldots, I_n$ y que σ^* posee intervalos componentes $I_1, \ldots, I_k^1$, I_k^2, $I_{k+1}, \ldots, I_n$, donde $I_k^1 \cup I_k^2 = I_k$. Por tanto se tiene que:

$$M[f;I_k^1] \le M[f;I_k],\quad M[f;I_k^2] \le M[f;I_k],$$

$$m[f;I_k^1] \ge m[f;I_k],\quad m[f;I_k^2] \ge m[f;I_k].$$

Luego $S_{\sigma^*} \le S_\sigma$ y $s_{\sigma^*} \ge s_\sigma$, y se concluye que:

$$S[f;\sigma^*] = \int_{[a,b]} S_{\sigma^*} \,\mathrm{dm} \le \int_{[a,b]} S_\sigma \,\mathrm{dm} = S[f;\sigma]$$

y

$$s[f;\sigma] = \int_{[a,b]} s_\sigma dm \le \int_{[a,b]} s_{\sigma*}\, dm = s[f;\sigma*].$$

Para obtener el resultado del lema 3.1.6, basta observar que $\sigma \cup \tau$ es un refinamiento, tanto de σ, como de τ, y luego:

$$s[f;\tau] \le s[f;\sigma \cup \tau] \le S[f;\sigma \cup \tau] \le S[f;\sigma].$$

Notación. Si $a, b \in R$, $a < b$, denotaremos por $P_{[a,b]}$ el conjunto de todas las subdivisiones de $[a,b]$.

Observación 3.1.7. En virtud de las hipótesis del lema 3.1.6, se tiene que:

$$m[f;[a,b]]\cdot(b-a) \le s[f;\tau] \le S[f;\sigma] \le M[f;[a,b]]\cdot(b-a)$$
$$\forall\ \tau,\sigma \in P_{[a,b]};$$

lo que se concluye si se observa que $\{a,b\} \in P_{[a,b]}$ y que cualquier subdivisión de $[a,b]$ es un refinamiento de $\{a,b\}$.

Definición 3.1.8. Sean $a, b \in R$, $a < b$ y $f:[a,b] \to R$ una función acotada. Se define la integral superior de f sobre $[a,b]$, $\overline{\int_a^b} f(x)dx$, por:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S[f;\sigma] : \sigma \in P_{[a,b]}\}.$$

De manera similar se define la integral inferior de f sobre $[a,b]$, $\underline{\int_a^b} f(x)dx$, por:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{s[f;\sigma] : \sigma \in P_{[a,b]}\}.$$

Observación 3.1.9. Una consecuencia inmediata de la observación 3.1.7 es que tanto la integral superior, como la inferior de f sobre $[a,b]$, están bien definidas y que:

$$m[f;[a,b]]\cdot(b-a) \le \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx \le M[f;[a,b]]\cdot(b-a).$$

Definición 3.1.10. Sean $a, b \in R$, $a < b$ y $f:[a,b] \to R$ una función acotada. Se dice que f es integrable Riemann sobre $[a,b]$, si:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

En este caso se define la integral de Riemann de f sobre $[a,b]$, $\int_a^b f(x)dx$, por:

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Más adelante se dará la condición necesaria y suficiente para que una función sea integrable Riemann y se verá, entre otras cosas, que las funciones continuas son integrables Riemann. Sin embargo, no todas las funciones son integrables Riemann, como lo demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.11. Consideremos la función $f:[0,1] \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional,} \end{cases}$$

es decir, f es la función característica (definida en $[0,1]$) del conjunto de los números racionales en $[0,1]$.

Es inmediato que si J es cualquier intervalo de longitud positiva contenido en $[0,1]$, entonces:

$$M[f;J] = 1, \qquad m[f;J] = 0.$$

Luego:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = 0 < 1 = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Por consiguiente, f no es integrable Riemann. Sin embargo, es claro que f es integrable Lebesgue (ya que es la función característica de un subconjunto medible de $[0,1]$) y que:

$$\int_{[0,1]} f \, \mathrm{dm} = 0$$

(ya que $m(Q \cap [0,1]) = 0$).

Un resultado que será de utilidad en lo que sigue es el siguiente teorema.

Teorema 3.1.12. *Sean $a, b \in R$, $a < b$ y $f:[a,b] \to R$ una función acotada. Entonces f es integrable Riemann sobre $[a,b]$ si, y sólo si, dado $\epsilon > 0$, existe $\sigma \in P_{[a,b]}$ tal que:*

$$S[f;\sigma] < s[f;\sigma] + \epsilon.$$

Demostración. Supóngase primero que f es integrable Riemann sobre $[a,b]$. Entonces:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Sea $\epsilon > 0$. En consecuencia existe una subdivisión σ de $[a,b]$ tal que:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\epsilon}{2} > S[f;\sigma]$$

y una subdivisión τ de $[a, b]$ tal que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx - \frac{\epsilon}{2} < s[f;\tau].$$

Luego, se tiene que:

$$s[f;\tau] + \frac{\epsilon}{2} > S[f;\sigma] - \frac{\epsilon}{2} \cdot$$

Por lo tanto, recordando el lema 3.1.6, se tiene que:

$$S[f;\sigma \cup \tau] < s[f;\sigma \cup \tau] + \epsilon.$$

Se concluye que la condición es necesaria.

Supongamos ahora que esta condición se verifica. Hay que demostrar que f es integrable Riemann, es decir que:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Obsérvese primero que basta demostrar que:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx,$$

ya que la otra desigualdad se verifica siempre.

Sea, pues, $\epsilon > 0$. Entonces existe $\sigma \in P_{[a,b]}$ tal que:

$$S[f;\sigma] < s[f;\sigma] + \epsilon.$$

Entonces:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S[f;\sigma] < s[f;\sigma] + \epsilon \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se tiene de inmediato que:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx,$$

lo que completa la demostración.

3.2. EXISTENCIA DE LA INTEGRAL DE RIEMANN

Antes de resolver de una vez por todas la cuestión de cuándo una función acotada definida en un intervalo compacto es integrable Riemann, hay que demostrar un resultado técnico que es necesario.

Lema 3.2.1. Sean J un intervalo compacto y $f: J \to R$ una función acotada. Supóngase que existe $a \in R$, $a > 0$, tal que:

$$\omega[f;x] < a \quad \forall \quad x \in J$$

entonces existe una subdivisión σ de J tal que:

$$S[f;\sigma] - s[f;\sigma] < a \cdot l(J).$$

Demostración. Puesto que $\omega[f;x] < a \ \forall\ x \in J$, cabe decir que para cada $x \in J$ hay un intervalo abierto I_x tal que:

$$\omega[f;\bar{I}_x \cap J] < a.$$

Ya que J es compacto y $\{I_x\}_{x \in J}$ es un cubrimiento abierto de J, existe un subcubrimiento finito de J, digamos $I_{x_1}, \ldots, I_{x_n}$. Sea σ el conjunto de los extremos de $I_{x_1} \cap J, \ldots, I_{x_n} \cap J$. Entonces σ es una subdivisión de J. Sean $I_1, \ldots, I_k$ los intervalos componentes de σ. Entonces:

$$\begin{aligned} S[f;\sigma] - s[f;\sigma] &= \sum_{i=1}^{k} M[f;I_i]\, l(I_i) - \sum_{i=1}^{k} m[f;I_i]\, l(I_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} (M[f;I_i] - m[f;I_i])\, l(I_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} \omega[f;I_i]\, l(I_i) < a \sum_{i=1}^{k} l(I_i) = a\, l(J). \end{aligned}$$

64 **Teorema 3.2.2.** *Sean $a, b \in R$, $a < b$, y $f:[a,b] \to R$ una función acotada. Entonces f es integrable Riemann si, y sólo si, el conjunto de puntos de $[a,b]$ donde f no es continua, posee medida cero (es decir, si, y sólo si, f es continua casi en todas partes).*

Demostración. Supongamos primero que f es integrable Riemann y denotemos por E el conjunto de puntos de $[a,b]$, donde f no es continua.

Ahora bien, se sabe que:

$$x \in E \Leftrightarrow \omega[f;x] > 0.$$

Para cada $n \in \mathbf{N}$, sea

$$E_n = \{x \in [a,b] : \omega[f;x] \geq \tfrac{1}{n}\}.$$

Entonces es claro que

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

y luego, en virtud de las propiedades de la medida de Lebesgue, basta mostrar que cada E_n es un conjunto de medida cero.

Sean $n \in \mathbf{N}$ y $\varepsilon > 0$. Como f es integrable Riemann sobre $[a,b]$, cabe decir, en virtud del teorema 3.1.12, que existe una subdivisión σ de $[a,b]$ tal que:

$$S[f;\sigma] - s[f;\sigma] < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Sean $I_1, \ldots, I_k$ los intervalos componentes de σ. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{k} \omega[f; I_i] \cdot l(I_i) = \sum_{i=1}^{k} M[; I_i]\, l(I_i) - \sum_{i=1}^{k} m[f; I_i] \cdot l(I_i) =$$

$$= S[f; \sigma] - s[f; \sigma].$$

Luego:

$$\sum_{i=1}^{k} \omega[f; I_i]\, l(I_i) < \frac{\epsilon}{2n}.$$

Ahora bien, si se escribe

$$E_n^1 = \{x \in E_n : x \in \sigma\}$$

$$E_n^2 = E_n \setminus E_n^1,$$

entonces $E_n = E_n^1 \cup E_n^2$.

Obsérvese ahora que E_n^1 es finito y por lo tanto es posible encontrar una familia finita de intervalos abiertos $J_1, \ldots, J_p$ tal que:

$$E_n^1 \subseteq J_1 \cup \ldots \cup J_p$$

y

$$\sum_{j=1}^{p} l(J_j) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $x \in E_n^2$. Entonces x es un punto interior de algún I_i, y por lo tanto

$$\omega[f; I_i] \geq \omega[f; x] \geq \frac{1}{n}.$$

Denótese por $I_{i_1}, \ldots, I_{i_r}$ a los intervalos componentes de σ que en su interior contienen algún elemento de E_n^2. Entonces:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} l(I_{i_j}) \leq \sum_{j=1}^{r} \omega[f; I_{i_j}]\, l(I_{i_j}) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \omega[f; I_i]\, l(I_i) < \frac{\epsilon}{2n},$$

y se obtiene que:

$$\sum_{j=1}^{r} l(I_{i_j}) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Denótese por J_{i_j} el intervalo abierto con los mismos extremos de I_{i_j}. Así se ha logrado obtener una colección finita de intervalos abiertos $J_1, \ldots, J_p$, $J_{i_1}, \ldots, J_{i_r}$ que es un cubrimiento abierto de E_n y cuya suma de longitudes es menor que ϵ. Se sigue de inmediato que la medida exterior de E_n es cero y luego E_n es medible y de medida cero. Como n era arbitrario, queda demostrado que E es medible y de medida cero.

Supóngase ahora que E es de medida cero. Hay que demostrar que f es integrable Riemann sobre $[a,b]$. Para esto se conservarán las notaciones de la primera parte de la demostración.

Obsérvese primero que basta suponer que $\omega[f;[a,b]] > 0$, ya que, en caso contrario, f sería una función constante y por lo tanto, a las claras, integrable Riemann.

Sea $\varepsilon > 0$ y elíjanse $n \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{b-a}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Puesto que E_n es de medida cero cabe afirmar que existe una sucesión de intervalos abiertos $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $E_n \subsetneq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) < \frac{\varepsilon}{2\omega[f;[a,b]]}.$$

Ahora bien, E_n es un subconjunto cerrado de $[a,b]$ (véase el ejercicio no. 2 de este capítulo) y como $[a,b]$ es acotado, se concluye que
66 E_n es compacto. Luego, existe un subcubrimiento finito de $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$, digamos $I_{k_1}, \ldots, I_{k_r}$.

Obsérvese ahora que

$$[a,b] \setminus (I_{k_1} \cup \ldots \cup I_{k_r})$$

es una unión finita de intervalos cerrados, digamos

$$[a,b] \setminus (I_{k_1} \cup \ldots \cup I_{k_r}) = J_1 \cup \ldots \cup J_s.$$

Entonces

$$[a,b] = (I_{k_1} \cup \ldots \cup I_{k_r} \cup J_1 \cup \ldots \cup J_s) \cap [a,b].$$

Además, se tiene que:

$$i \in \{1, \ldots, s\},\ x \in J_i \Rightarrow \omega[f;x] < \frac{1}{n}.$$

Luego, en virtud del lema 3.2.1, se puede decir que existe una subdivisión σ_i de $J_i (i = 1, \ldots, s)$ tal que:

$$S[f;\sigma_i] - s[f;\sigma_i] < \frac{l(J_i)}{n}.$$

Defínase ahora

$$\sigma = \sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_s \cup \{a, b\}.$$

En tal caso σ es una subdivisión de $[a, b]$ y es fácil ver que los intervalos componentes de σ son los de $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ junto con $\bar{I}_{k_1} \cap [a, b]$, $\ldots, \bar{I}_{k_r} \cap [a, b]$. Luego, cabe afirmar que:

$$\begin{aligned}
S[f;\sigma] - s[f;\sigma] &= \sum_{i=1}^{s} (S[f;\sigma_i] - s[f;\sigma_i]) + \sum_{j=1}^{r} (M[f; \bar{I}_{k_j} \cap [a, b]] - \\
&\quad - m[f; \bar{I}_{k_j} \cap [a, b]])\, l(\bar{I}_{k_j} \cap [a, b]) < \\
&< \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} l(J_i) + \sum_{j=1}^{r} \omega[f; \bar{I}_{k_j} \cap [a, b]]\, l(I_{k_j}) \leq \\
&\leq \frac{b-a}{n} + \omega[f;[a, b]] \sum_{j=1}^{r} l(I_{k_j}) < \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \omega[f;[a, b]] \frac{\epsilon}{2\omega[f;[a, b]]} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Luego, en virtud del teorema 3.1.12, f es integrable Riemann sobre $[a, b]$.

Esto completa la demostración.

Observación 3.2.3. Se concluye de inmediato que, si $f: [a, b] \to R$ es continua, entonces f es integrable Riemann.

3.3. COMPARACIÓN CON LA INTEGRAL DE LEBESGUE

Teorema 3.3.1. *Sean $a, b \in R$, $a < b$ y $f: [a, b] \to R$, acotada e integrable Riemann. Entonces f es integrable Lebesgue y:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f\, dm.$$

Demostración. Sea E el conjunto de puntos de $[a, b]$, donde f no es continua. Entonces se sabe que E es medible y de medida cero. Además, $f/_{([a,b]\setminus E)}$ es continua y por lo tanto medible.

Luego, si $\alpha \in R$:

$$\begin{aligned}
f^{-1}((\alpha, +\infty)) &= \{x \in [a, b] : f(x) > \alpha\} = \\
&= \{x \in ([a, b]\setminus E) : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in E : f(x) > \alpha\} = \\
&= (f/_{([a,b]\setminus E)})^{-1}(\alpha_1, +\infty) \cup \{x \in E : f(x) > \alpha\}.
\end{aligned}$$

Como todo subconjunto de un conjunto de medida cero es medible, se concluye que f es una función medible.

Además, como f es acotada, se tiene que existe $M \geq 0$ tal que:

$$|f(x)| \leq M \quad \forall\ x \in [a, b].$$

Luego:

$$\int_{[a,b]} |f| \, dm \leq M \cdot (b-a) < +\infty.$$

Como consecuencia f es integrable Lebesgue.

Veamos ahora que $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f \, dm$.

Sea $\varepsilon > 0$. En tal caso existe una subdivisión $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx - \varepsilon = \int_a^b f(x)dx - \varepsilon < s[f;\sigma].$$

Ahora bien, defínase la función simple $s_\sigma : [a, b] \to R$ por:

$$s_\sigma = \sum_{i=1}^{n} m[f;[x_{i-1}, x_i]] \, \chi_{[x_{i-1}, x_i)}.$$

Resulta claro que s_σ es medible y que

$$s_\sigma(x) \leq f(x) \quad \forall \ x \in [a, b]$$

y que:

$$\int_{[a,b]} s_\sigma \, dm = s[f;\sigma].$$

Luego:

$$\int_a^b f(x)dx < \int_{[a,b]} s_\sigma \, dm + \varepsilon \leq \int_{[a,b]} f \, dm + \varepsilon.$$

Por lo tanto: $\int_a^b f(x)dx - \int_{[a,b]} f \, dm < \varepsilon$.

De manera totalmente similar (valiéndose de sumas superiores), se obtiene que

$$\int_{[a,b]}^{b} f \, dm - \int_a^b f(x)dx < \varepsilon.$$

Luego se puede decir que:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_{[a,b]} f \, dm \right| < \varepsilon \quad \forall \ \varepsilon > 0.$$

Por lo tanto debe tenerse que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f \, dm.$$

Corolario 3.3.2. Sean $a, b \in R$, $a < b$, $f_1, f_2 : [a, b] \to R$ funciones acotadas e integrables Riemann y $\alpha \in R$. Entonces:

i) $|f_1|$ es integrable Riemann y:

$$\left|\int_a^b f_1(x)dx\right| \leq \int_a^b |f_1|(x)dx,$$

ii) $f_1 + f_2$ es integrable Riemann y:

$$\int_a^b (f_1 + f_2)(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx,$$

iii) αf_1 es integrable Riemann y:

$$\int_a^b (\alpha f_1)(x)dx = \alpha \int_a^b f_1(x)dx.$$

Demostración. i) Es claro que $|f_1|$ es acotada y continua casi en todas partes, ya que f_1 lo es. Se tiene:

$$\left|\int_a^b f_1(x)dx\right| = \left|\int_{[a,b]} f_1 \, dm\right| \leq \int_{[a,b]} |f_1| \, dm = \int_a^b |f_1|(x)dx.$$

ii) Sean $E_1 = \{x \in [a, b] : f_1 \text{ no es continua en } x\}$,

$$E_2 = \{x \in [a, b] : f_2 \text{ no es continua en } x\},$$

$$E = \{x \in [a, b] : f_1 + f_2 \text{ no es continua en } x\}.$$

Entonces $E \subseteq E_1 \cup E_2$, y por lo tanto, E es de medida cero. Además $f_1 + f_2$ es acotada, ya que f_1 y f_2 lo son. Luego $f_1 + f_2$ es integrable Riemann. Se tiene:

$$\begin{aligned}\int_a^b (f_1 + f_2)(x)dx &= \int_{[a,b]} (f_1 + f_2) \, dm = \\ &= \int_{[a,b]} f_1 \, dm + \int_{[a,b]} f_2 \, dm = \\ &= \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.\end{aligned}$$

iii) La demostración de este caso es similar a la de los casos anteriores.

Hasta ahora se ha visto que las propiedades algebraicas de las integrales de Riemann y de Lebesgue son las mismas y que los valores de ambas integrales coinciden cuando la función es acotada e integrable Riemann. Sin embargo, se ha visto funciones acotadas que son integrables Lebesgue, pero no en el sentido de Riemann. Luego, la primera observación es que hay más funciones integrables Lebesgue que funciones integrables Riemann. En segundo lugar, hay que observar que para definir la integral de Lebesgue no fue necesario suponer que las funciones fuesen acotadas. Una diferencia fundamental entre ambas integrales es que la de Lebesgue maneja límites con facilidad en tanto que la de Riemann no, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3.3. Considérese la función $f:[0,1] \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es racional.} \end{cases}$$

Se sabe ya que f no es integrable Riemann, pero que es integrable Lebesgue.

Para cada $n \in \mathbf{N}$, defínase:

$$A_n = \{\tfrac{k}{n} : k \in Z,\ 0 \le k \le n\}$$

y

$$B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Es claro que $B_n \subseteq B_{n+1}$, para todo $n \in \mathbf{N}$, y que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = Q \cap [0,1]$. Para cada $n \in \mathbf{N}$, defínase $f_n:[0,1] \to R$ mediante:

$$f_n = \chi_{B_n}.$$

Entonces, puesto que f_n es la función característica de un subconjunto finito de $[0,1]$, f_n sólo es discontinua en un número finito de puntos. Como, además, f_n es acotada para todo n, se tiene que f_n es integrable Riemann para todo $n \in \mathbf{N}$ y puesto que todo intervalo de longitud positiva contiene números irracionales, se tiene que

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 0 \quad \forall \quad n \in \mathbf{N}.$$

Defínase $g:[0,1] \to R$ mediante:

$$g(x) = 1 \quad \forall \quad x \in [0,1].$$

Entonces $|f_n(x)| \le g(x)$, $\forall\ x \in [0,1]$, y además g es integrable Riemann sobre $[0,1]$.

Obsérvese ahora que, si $x \in [0,1]$ y si x es irracional, entonces $\chi \notin B_n$ $\forall\ n \in \mathbf{N}$, y luego:

$$f_n(x) = 0 \quad \forall \quad n \in \mathbf{N},$$

y si $x \in [0,1]$ es racional, entonces se puede escribir $x = \frac{p}{q}$ donde $q \in$ $\in \mathbf{N}$ y $p \in Z$, $0 \le p \le q$, teniendo que $x \in B_q$, y luego $x \in B_n$, $\forall\ n \ge q$, de donde cabe afirmar que

$$f_n(x) = 1 \quad \forall \quad n \ge q.$$

Por consiguiente:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall \quad x \in [0,1].$$

Así se tiene una sucesión de funciones que cumple todas las condiciones del Toerema de Convergencia Dominada con respecto a la integral de Riemann, pero tal que la función límite no es integrable Riemann. En conclusión se deduce que el mencionado teorema no es válido para la integral de Riemann.

Para obtener un resultado relativo a límites de integrales de Riemann de sucesiones de funciones hay que recurrir a una noción de límites de sucesiones de funciones, mucho más restrictiva que la convergencia puntual.

Definición 3.3.4. Sean $A \subseteq R$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones reales definidas en A y $f: A \to R$. Se dice que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente hacia f sobre A, lo que se denota por $\lim_{n\to\infty} f_n = f[\text{unif}]$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbf{N}$ tal que:

$$n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \;\; \forall \; x \in A.$$

Observación 3.3.5. Se tiene de inmediato que, si $\lim_{n\to\infty} f_n = f[\text{unif}]$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall \;\; x \in A. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

Sin embargo, la convergencia uniforme de una sucesión de funciones exige mucho más que (*).

Teorema 3.3.6. *Sean $A \subseteq R$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones reales definidas en A, $f: A \to R$ y $x_0 \in A$. Supóngase que $\lim_{n\to\infty} f_n = f[\text{unif}]$ y que f_n es continua en x_0, $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Entonces f es continua en x_0.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. En tal caso existe $N \in \mathbf{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \;\; \forall \; x \in A.$$

En particular,

$$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \;\; \forall \; x \in A.$$

Ahora bien, puesto que f_N es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que:

$$x \in A, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sea, pues, $x \in A$ tal que $|x - x_0| < \delta$. En consecuencia

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego f es continua en x_0.

Ejemplo 3.3.7. Consideremos la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones definidas en $[0, 1]$ dada por:

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \ \forall \ x \in [0, 1], \ \forall \ n \in \mathbf{N}.$$

Sea $f: [0, 1] \to R$ la función constante igual a cero. Entonces, dado $\epsilon > 0$, se sabe que existe $N \in \mathbf{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Luego, si $n \geq N$, se tiene que:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{n}\right| = \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n} < \epsilon \ \forall \ x[0, 1].$$

Luego: $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f[\text{unif}]$.

Ejemplo 3.3.8. Para cada $n \in \mathbf{N}$, defínase $f_n: [0, 1] \to R$ mediante

$$f_n(x) = x^n, \quad \forall \ x \in [0, 1]$$

y defínase $f: [0, 1] \to R$ por:

$$f(x) = 0, \quad \forall \ x \in [0, 1)$$

$$f(1) = 1.$$

Es claro entonces que $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), \ \forall \ x \in [0, 1]$. Sin embargo, no es cierto que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converja uniformemente hacia f en $[0, 1]$, ya que cada f_n es continua en 1 y f no lo es.

Teorema 3.3.9. *Sean $a, b \in R$, $a < b$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones reales acotadas definidas en $[a, b]$ y $f: [a, b] \to R$. Entonces, si $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f[\text{unif}]$ y si f_n es integrable Riemann $\forall \ n \in \mathbf{N}$, se tiene que f es integrable Riemann sobre $[a, b]$ y que:*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, dx = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbf{N}$, sea E_n el conjunto de puntos de $[a, b]$, donde f_n no es continua, y sea E el conjunto de puntos, donde f no es continua.

Entonces, en virtud del teorema 3.3.6, $E \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, y como la medida de cada E_n es cero, se sigue que E es de medida cero.

Además, puesto que $\lim_{n \to \infty} f_n = f$ [unif], se tiene que existe $N \in \mathbf{N}$ tal que:

$$n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < 1, \quad \forall\ x \in [a, b].$$

Luego:

$$|f(x)| \leq |f_N(x) - f(x)| + |f_N(x)| < 1 + |f_N(x)|$$

y como f_N es acotada, cabe decir que f es acotada. Se concluye que f es integrable Riemann.

Sea $M_0 = \sup\{|f_N(x)| : x \in [a, b]\}$, y defínase $g : [a, b] \to R$ mediante:

$$g(x) = M_0 + 1, \quad \forall\ x \in [a, b].$$

Es inmediato que g es integrable Lebesgue sobre $[a, b]$.

En tal caso se tiene que la sucesión $\{f_n\}_{n=N}^{\infty}$ satisface las condiciones del Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue. Por lo tanto es posible afirmar que:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{[a,b]} |f_n - f|\, dm = 0.$$

Pero, en virtud del teorema 3.3.1, se puede decir que:

$$\int_{[a,b]} |f_n - f|\, dm = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx.$$

Luego:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0.$$

Ahora, como $\left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx$, la segunda igualdad sigue de inmediato.

Ejercicios

1) Demuéstrense las afirmaciones hechas en la observación 3.1.2.

2) Sean $a, b \in R$, $a < b$ y $f : [a, b] \to R$ una función acotada y $r > 0$. Demuéstrese que el conjunto

$$E_r = \{x \in [a, b] : \omega[f; x] \geq r\}$$

es cerrado.

3) Sean $a, b, c \in R$, $a < b$ y defínase $f : [a, b] \to R$ mediante

$$f(x) = c \quad \forall\ x \in [a, b].$$

Demuéstrese que f es integrable Riemann sobre $[a, b]$ y que

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a).$$

4) Sean $a, b \in R$, $a < b$ y $f, g : [a, b] \to R$ dos funciones acotadas. Supóngase que f es integrable Riemann sobre $[a, b]$.

i) ¿Es cierto que si $f(x) = g(x)$, salvo para un número finito de puntos de $[a, b]$, entonces g es integrable Riemann sobre $[a, b]$?

ii) ¿Es cierto que si $f(x) = g(x)$ c. t. p., entonces g es integrable Riemann sobre $[a, b]$?

5) i) Demuéstrese que si $x \in R$ y $n \in \mathbf{N}$, entonces

$$2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)[\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \ldots + \operatorname{sen} nx] = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{2n+1}{2} x\right).$$

ii) Demuéstrese que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = 1.$$

6) Demuéstrese que:

74

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{3}.$$

7) Sea $g : [0, 1] \to R$ una función continua. Demuestre que:

$$\int_{[0,1]} g \, dm = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right).$$

8) Demuestre que si $a, b \in R$, $a < b$, si $f : [a, b] \to R$ es una función continua y si se tiene:

i) $f(x) \geq 0 \quad \forall \; x \in [a, b]$,

ii) $\exists \; c \in [a, b] \ni f(c) > 0$, entonces:

$$\int_{[a,b]} f \, dm > 0.$$

9) Demuéstrese que

$$\frac{2\pi^2}{9} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2x}{\operatorname{sen} x} dx \leq \frac{4\pi^2}{9}.$$

10) Demuéstrese que:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^n} dx = 0.$$

11) Considérese la función $g : [1,\infty) \to R$ definida por:

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}.$$

i) Demuéstrese que $\lim_{n\to\infty}\int_1^n |g(x)|dx$ existe como número real.

ii) Demuéstrese que g es integrable Lebesgue sobre $[1,\infty)$.

12) Demuéstrese que las sucesiones $\{\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n e^{x/2}\,dx\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\int_0^n (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}\,dx\}_{n=1}^{\infty}$ son convergentes en R.

13) Supóngase que $g : [0,+\infty) \to R$ es una función tal que:

i) g es integrable Riemann sobre $[0,n]$, para todo $n \in \mathbf{N}$.

ii) $\lim_{n\to\infty}\int_0^n g(x)dx$ existe como número real.

¿Es cierto que g es integrable Lebesgue sobre $[0,+\infty)$?

14) Demuéstrese que si $g : [0,+\infty) \to R$ es una función tal que:

i) g es integrable Riemann sobre $[0,n]$, para todo $n \in \mathbf{N}$,

ii) $\lim_{n\to\infty}\int_0^n |g(x)|dx$ existe como número real, entonces g es integrable Lebesgue sobre $[0,+\infty)$ y:

$$\int_{[0,+\infty)} g\,\mathrm{dm} = \lim_{n\to\infty}\int_0^n g(x)dx.$$

15) Sean $a,b \in R$, $a < b$ y $f : [a,b] \to R$ una función integrable Riemann. Defínase $F : [a,b] \to R$, mediante:

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx.$$

Demuéstrese que F es continua sobre $[a,b]$.

16) Sean $a,b \in \mathbf{R}$, $a < b$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de $[a,b]$ en $\mathbf{R}$ tal que:

i) f_n es integrable Riemann para todo $n \in \mathbf{N}$;

ii) Existe una constante $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$ y todo $n \in \mathbf{N}$;

iii) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ existe para todo $x \in [a,b]$;

iv) f es integrable Riemann.

Demuéstrese que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

(Intente demostrar este hecho sin usar el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue. Esto mostrará el poder del mencionado Teorema.)

4

DIFERENCIACIÓN

4.1. DIFERENCIACIÓN Y LA INTEGRAL DE RIEMANN

El propósito de esta sección es recordar los teoremas fundamentales del cálculo que establecen la relación entre diferenciación y la integral de Riemann.

Definición 4.1.1. Sean I un intervalo abierto, $f: I \to \mathbf{R}$ una función y $x_0 \in I$. Se dice que f es derivable (o diferenciable) en x_0 si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe como número real. En este caso se denotará:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

y se dirá que $f'(x_0)$ es la derivada de f en x_0.

Si f es diferenciable en x_0, para todo $x_0 \in I$ se dirá, simplemente, que f es una función derivable (o diferenciable), y se define la derivada de f, f', como la función definida en I que asocia a cada $x_0 \in I$ con la derivada de f en x_0.

Observación 4.1.2. Si f es derivable en x_0, entonces f es continua en x_0. Por consiguiente, toda función derivable es automáticamente continua; sin embargo, la continuidad de f en x_0 no implica que f sea derivable en x_0.

Es claro que toda función constante definida en un intervalo abierto es diferenciable y su derivada es la función idénticamente nula.

Proposición 4.1.3. Sean I un intervalo abierto, f y g funciones reales definidas en I, y $x_0 \in I$. Si f y g son derivables en x_0 se tiene:

i) $f + g$ es derivable en x_0 y $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;

ii) si α es un número real, αf es derivable en x_0 y $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$;

iii) $f \cdot g$ es derivable en x_0 y $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;

iv) si $g(x_0) \neq 0$, entonces existe un intervalo abierto I_1 tal que $x_0 \in I_1$ y $g(x) \neq 0$ para $x \in I_1$.

Si se define f/g en I_1, se tiene que f/g es derivable en x_0 y $(f/g)'(x_0) = \dfrac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$.

Teorema 4.1.4. (Regla de la Cadena). *Sean I_1 e I_2 dos intervalos abiertos; $f: I_1 \to \mathbf{R}$ y $g: I_2 \to \mathbf{R}$ funciones, y $x_0 \in I_1$. Entonces, si $f(I_1) \subseteq \subseteq I_2$ y si f es derivable en x_0 y g es derivable en $f(x_0)$, se tiene que $g \circ f: I_1 \to \mathbf{R}$ es derivable en x_0 y que $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.*

Proposición 4.1.5. Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ y $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ una función continua. Sea x_0 un punto de máximo (o de mínimo) para f. Entonces, si $x_0 \in (a,b)$ y si f es derivable en x_0, se tiene que $f'(x_0) = 0$.

Una consecuencia importante de la proposición 4.1.5 es el siguiente teorema.

Teorema 4.1.6. (Teorema de Rolle). *Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ y $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ una función continua derivable en (a,b). Entonces, si $f(a) = = f(b)$, se tiene que existe (por lo menos) un $x_0 \in (a,b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.*

El Teorema de Rolle trae como consecuencia el Teorema del Valor Medio, que constituye un resultado muy importante.

Teorema 4.1.7. (Teorema del Valor Medio). *Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ y $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ una función continua derivable en (a,b). Entonces existe $x_0 \in (a,b)$ tal que:*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración. Definamos $h: [a,b] \to \mathbf{R}$ mediante

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad \forall\ x \in [a,b].$$

Es claro que h cumple todas las condiciones para aplicar el Teorema de Rolle. Por consiguiente, hay $x_0 (a,b)$ tal que:

$$h'(x_0) = 0.$$

Pero $h'(x_0) = f'(x_0) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, lo que demuestra el resultado.

Proposición 4.1.8. Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ y $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ una función continua y derivable en (a,b). Entonces, si $f'(x_0) = 0$ para todo $x \in \in (a,b)$, se tiene que f' es una función constante.

Demostración. Sea $x \in (a,b)$. Entonces f restringida al intervalo $[a,x]$ cumple todas las condiciones para aplicar el Teorema del Valor Medio y, por consiguiente, hay $c \in (a,x)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Pero $f'(c) = 0$, de donde se concluye que $f(x) = f(a)$ $\forall x \in (a,b)$. Luego f es constante.

Corolario 4.1.9. Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, y f y g dos funciones reales continuas definidas en $[a,b]$. Entonces, si f y g son derivables en (a,b) y si $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in [a,b]$, se tiene que existe una constante c tal que:

$$f(x) = g(x) + c \qquad \forall\ x \in [a,b].$$

A continuación se demostrarán los teoremas fundamentales del cálculo.

Teorema 4.1.10. (Teorema Fundamental del Cálculo I). *Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ y $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ una función acotada e integrable Riemann. Defínase la función $F: [a,b] \to \mathbf{R}$ mediante*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \forall\ x \in [a,b].$$

Entonces, si $x_0 \in (a,b)$ y si f es continua en x_0, se tiene que F es derivable en x_0 y que

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Demostración. Sea $h > 0$ tal que $(x_0 + h) \in [a,b]$ y denótese por I_h el intervalo $[x_0, x_0 + h]$. Se tiene:

$$f(x_0) - \omega[f; I_h] \leq f(t) \leq f(x_0) + \omega[f; I_h] \quad \forall\ t \in I_h.$$

De aquí se concluye de inmediato que:

$$h(f(x_0) - \omega[f; I_h]) \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leq h(f(x_0) + \omega[f; I_h]),$$

es decir:

$$h(f(x_0) - \omega[f; I_h]) \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq h(f(x_0) + \omega[f; I_h]).$$

Luego:

$$\left|\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leq \omega[f; I_h].$$

Ahora bien, es fácil mostrar que:

$$\lim_{h \to 0+} \omega[f; I_h] = \omega[f; x_0]$$

y como f es continua en x_0, se sigue (véase la observación 3.1.2) que:

$$\lim_{h \to 0+} \omega[f; I_h] = 0.$$

Luego:

$$\lim_{h \to 0+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

De forma similar se demuestra que:

$$\lim_{h \to 0-} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

lo que da la conclusión deseada.

Corolario 4.1.11. Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ y $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ una función continua. Si se define $F: [a, b] \to \mathbf{R}$ mediante

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

se tiene que F es derivable en (a, b) y que $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a, b)$.

Observación 4.1.12. Tradicionalmente al corolario 4.1.11 (y no al teorema 4.1.10) se le ha llamado uno de los teoremas fundamentales del cálculo.

Teorema 4.1.13. (Teorema Fundamental del Cálculo II). *Sean* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ *y* $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ *una función continua. Si* $\phi: [a, b] \to \mathbf{R}$ *es una función continua y derivable en* (a, b) *y si* $\phi'(x) = f(x)$ *para todo* $x \in$ $\in [a, b]$, *se tiene que:*

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a).$$

Demostración. Defínase $F: [a, b] \to \mathbf{R}$ mediante

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Se tiene que F es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y que $F'(x) = \phi'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a, b]$. Luego, en virtud del corolario 4.1.9, cabe afirmar que hay una constante c tal que:

$$\phi(x) = F(x) + c \quad \forall x \in [a, b].$$

Por consiguiente:

$$\phi(b) - \phi(a) = F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Observación 4.1.14. El Teorema Fundamental del Cálculo II es el teorema que permite calcular integrales de Riemann de funciones continuas mediante la búsqueda de "antiderivadas".

4.2. FUNCIONES MONÓTONAS

En lo que resta de este capítulo se abordará la siguiente pregunta: ¿Cuál es la mayor generalización posible de los teoremas fundamentales del cálculo, si se consideran las integrales en el sentido de Lebesgue? Para responderla es necesario considerar en primer lugar las funciones llamadas monótonas.

Definición 4.2.1. Sean I un intervalo y $f: I \to \mathbf{R}$ una función. Se dice que:

i) f es una función monótona creciente, si $x, y \in I$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

ii) f es una función monótona decreciente, si $x, y \in I$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

iii) f es monótona, si f es monótona creciente o monótona decreciente.

Más adelante se demostrará el famoso teorema de Lebesgue, que dice que toda función monótona es derivable en casi todas sus partes.

Definición 4.2.2. Sean E un subconjunto de $\mathbf{R}$ e Y un cubrimiento de E que consiste en intervalos. Se dice que Y es un cubrimiento de Vitali de E en el caso que, dados $\epsilon > 0$ y $x \in E$, existe un intervalo $I \in Y$ tal que $x \in I$ y $0 < l(I) < \epsilon$.

Teorema 4.2.3. (Vitali). *Sean E un subconjunto de $\mathbf{R}$ con medida exterior finita e Y un cubrimiento de Vitali de E. Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe una colección finita y disjunta, $\{I_1, \ldots, I_N\}$, de elementos de Y tal que*

$$m^*(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} I_i) < \epsilon .$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Es claro que se puede suponer sin pérdida de generalidad que todos los intervalos de Y son cerrados y que no existe un subcubrimiento finito de Y (para E).

Sea V un subconjunto abierto de $\mathbf{R}$ que contiene a E y que posee medida finita (tal V existe en virtud de la definición de medida exterior). Obsérvese aquí que se puede suponer sin pérdida de generalidad que todos los intervalos de Y están contenidos en V.

Se eligirá ahora una sucesión de elementos de Y mediante un proceso de inducción: Sea I_1 cualquier elemento de Y y supóngase que se ha elegido $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Escríbase:

$$k_n = \sup \{l(I) : I \in Y, \ \ I \cap (\bigcup_{i=1}^{n} I_i) = \phi\}.$$

Puesto que $E \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, se tiene que $0 < k_n < m(V)$.

Ahora se elige $I_{n+1} \in Y$ tal que $I_{n+1} \cap (\bigcup_{i=1}^{n} I_i) = \phi$ y $l(I_{n+1}) > \frac{1}{2}k_n$. De este modo se obtiene una sucesión disjunta $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de Y. Obsérvese que $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subset V$, y por lo tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \leq m(V) < \infty.$$

Luego se puede elegir $N \in \mathbf{N}$ tal que:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} l(I_n) < \frac{\epsilon}{5} .$$

Para completar la demostración basta mostrar que:

$$m^*(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} I_i) < \epsilon .$$

Sea $x \in (E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} I_i)$. Puesto que $\bigcup_{i=1}^{N} I_i$ es un subconjunto cerrado de $\mathbf{R}$ que no contiene a x, es posible encontrar un intervalo $I_0 \in Y$ que contiene a x tal que:

$$I_0 \cap (\bigcup_{i=1}^{N} I_i) = \emptyset \text{ y } l(I_0) > 0.$$

Ahora bien, se debe tener en cuenta que existe $n \in \mathbf{N}$, $n > N$ tal que $I_0 \cap I_n \neq \emptyset$, ya que si esto no ocurriese, se tendría que para todo $n \in \mathbf{N}$,

$$l(I_0) \in \{l(I) : I \in Y, \quad I \cap (\bigcup_{i=1}^{n} I_i) = \emptyset\}$$

y por lo tanto

$$l(I_0) \leq k_n \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Pero $l(I_{n+1}) > \frac{1}{2} k_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$ y $\lim\limits_{n \to \infty} l(I_{n+1}) = 0$, de donde se sacaría por conclusión que $l(I_0) = 0$, lo que es una contradicción.

Sea, pues, n el menor de los números naturales tales que $I_0 \cap I_n \neq \emptyset$. Se tiene que $l(I_0) \leq k_{n-1} \leq 2l(I_n)$ y $n > N$.

Obsérvese ahora que $x \in I_0$ y que $I_0 \cap I_n \neq \emptyset$. Por lo tanto la distancia de x al punto medio de I_n es a lo sumo $l(I_0) + \frac{1}{2} l(I_n) \leq \frac{5}{2} l(I_n)$.

Para cada $n > N$, defínase el intervalo J_n como aquel intervalo cerrado que posee el mismo punto medio que I_n y cuya longitud es cinco veces la longitud de I_n. Lo recién demostrado muestra que $x \in J_n$ respecto a algún $n > N$. Por consiguiente:

$$(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} I_i) \subseteq \bigcup_{n=N+1}^{\infty} J_n.$$

Por lo tanto

$$m^*(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} I_i) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} l(J_n) = 5 \sum_{n=N+1}^{\infty} l(I_n) < \epsilon.$$

Definición 4.2.4. Sean I un intervalo abierto, $f: I \to \mathbf{R}$ una función y $x_0 \in I$. Se definen:

$$D^+f(x_0) = \inf\{\sup\{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} : 0 < h < \delta\} : \delta > 0\}$$

$$D^-f(x_0) = \inf\{\sup\{\frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} : 0 < h < \delta\} : \delta > 0\}$$

$$D_+f(x_0) = \sup\{\inf\{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} : 0 < h < \delta\} : \delta > 0\}$$

$$D_-f(x_0) = \sup\{\inf\{\frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} : 0 < h < \delta\} : \delta > 0\}.$$

Los números reales extendidos $D^+f(x_0)$, $D^-f(x_0)$, $D_+f(x_0)$, $D_-f(x_0)$ se denominan derivadas de Dini de f en x_0.

Observación 4.2.5. a) Es claro que $D^+f(x_0) \geq D_+f(x_0)$, $D^-f(x_0) \geq D_-f(x_0)$. b) Es fácil ver que f es derivable en x_0 si, y sólo si,

$$D^+f(x_0) = D_+f(x_0) = D^-f(x_0) = D_-f(x_0) \neq \pm\infty.$$

En este caso, $f'(x_0) = D^+f(x_0) = D_+f(x_0) = D^-f(x_0) = D_-f(x_0)$.

Teorema 4.2.6. (Lebesgue). *Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ y $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ una función monótona creciente. Entonces f es derivable en casi todas sus partes, su derivada es una función medible y*

$$\int_{[a,b]} f'\,dm \leq f(b) - f(a).$$

Demostración. En virtud de la observación 4.2.5, basta mostrar que el conjunto de puntos de $[a,b]$, donde al menos dos de las derivadas de Dini de f son diferentes, o donde todas las derivadas de Dini son $+\infty$ o $-\infty$, posee medida cero.

En lo que sigue se demostrará que los conjuntos

$$E = \{x \in (a,b): D^+f(x) > D_-f(x)\}$$

$$F = \{x \in (a,b): \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = +\infty\}$$

poseen medida cero. El resto de los casos se trata de manera similar.

Para cada par de números racionales positivos u, v tal que $u < v$ se escribirá

$$E_{u,v} = \{x \in E: D_-f(x) < u < v < D^+f(x)\}.$$

Es claro que:

$$E = \bigcup_{\substack{u,v\in\mathbf{Q}\\ 0<u<v}} E_{u,v}$$

Puesto que la colección de los $E_{u,v}$ es numerable, basta demostrar que cada $E_{u,v}$ posee medida cero. Sea, pues, u, v un tal par de números racionales y póngase $\gamma = m^*(E_{u,v})$.

Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe un conjunto abierto V tal que $E_{u,v} \subset V$ y $m(V) < \gamma + \epsilon$. Para cada $x \in E_{u,v}$ hay intervalos $[x-h, x]$, de longitud arbitrariamente pequeña (si bien positiva), tales que $[x-h, x]$ y $f(x) - f(x-h) < uh$ (puesto que $D_-f(x) < u$). El conjunto de todos los intervalos de esta forma y con estas propiedades (variando x y h) es un cubrimiento de Vitali para $E_{u,v}$, y por lo tanto, de acuerdo con el teorema 4.2.3 se elige una colección finita y disjunta de intervalos, por ejemplo, $\{[x_1-h_1, x_1], \ldots, [x_N-h_N, x_N]\}$ tal que

$$m^*(E_{u,N} \setminus \bigcup_{i=1}^{N} [x_i - h_i, x_i]) < \epsilon.$$

Entonces se tiene (véase la proposición 1.2.2) que

$$m^*(E_{u,v} \cap (\bigcup_{i=1}^{N} [x_i - h_i, x_i])) > \gamma - \epsilon.$$

Se tiene:

$$\sum_{i=1}^{N} [f(x_i) - f(x_i - h_i)] < u \sum_{i=1}^{N} h_i \le um(V) < u(\gamma + \epsilon).$$

Se observa aquí que cada punto y de $E_{u,v} \cap (\bigcup_{i=1}^{N} [x_i - h_i, x_i])$ es el extremo izquierdo de un intervalo $[y, y+k]$, $k > 0$, de longitud tan pequeña como se desee, contenido en alguno de los intervalos $[x_i - h_i, x_i]$ y tal que $f(y+k) - f(y) > vk$ (puesto que $D^+f(y) > v$). La colección de tales intervalos forma un cubrimiento de Vitali para $E_{u,v} \cap (\bigcup_{i=1}^{N} [x_i - h_i, x_i])$ y, aplicando el teorema 4.2.3, se puede elegir ahora una colección finita y disjunta de intervalos, digamos $\{[y_1, y_1 + k_1], \ldots, [y_M, y_M + k_M]\}$ tal que

$$m^*[(E_{u,v} \cap (\bigcup_{i=1}^{N} [x_i - h_i, x_i])) \setminus \bigcup_{j=1}^{M} [y_j, y_j + k_j]] < 2\epsilon.$$

Se tiene entonces que:

$$m^*(E_{u,v} \cap (\bigcup_{i=1}^{N} [x_i - h_i, x_i]) \cap (\bigcup_{j=1}^{M} [y_j, y_j + k_j] > \gamma - 2\epsilon.$$

Adviértase que si se toma $i \in \{1, \ldots, N\}$ y se considera todos los intervalos $[y_j, y_j + k_j]$ contenidos en $[x_i - h_i, x_i]$ se tiene, puesto que f es monótona creciente (véase el ejercicio 15), que:

$$\sum [f(y_j + k_j) - f(y_j)] \le f(x_i) - f(x_i - h_i).$$

Puesto que todo intervalo $[y_j, y_j + k_j]$ está contenido en algún intervalo $[x_i - h_i, x_i]$, se concluye que:

$$\sum_{i=1}^{N} (f(x_i) - f(x_i - h_i)) \ge \sum_{j=1}^{M} (f(y_j + k_j) - f(y_j)).$$

Luego: $u(\gamma + \epsilon) \ge v(\gamma - 2\epsilon)$.

Como $\epsilon > 0$ era arbitrario, se tiene necesariamente que $u\gamma \ge v\gamma$. Pero como $0 < u < v$, resulta $\gamma = 0$, es decir, $m^*(E_{u,v}) = 0$.

Se demostrará ahora que $m^*(F) = 0$.

Sea $x \in F$. Entonces $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = +\infty$, y por lo tanto, si M es cualquier número real positivo, entonces existen intervalos de la forma $[x, x+h] \le (a, b)$, de longitud arbitrariamente pequeña tales que:

$$f(x+h) - f(x) > Mh.$$

Se obtiene así un cubrimiento de Vitali para F. Según el ejercicio 14 es posible obtener una sucesión disjunta de intervalos $\{[x_n, x_n + h_n]\}_{n=1}^{\infty}$ tal que:

$$m^*(F \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} [x_n, x_n + h_n])) = 0.$$

Entonces se tiene que:

$$m^*(F) \le \sum_{n=1}^{\infty} h_n.$$

Pero, ahora se puede decir:

$$Mm^*(F) \leq M\sum_{n=1}^{\infty} h_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} Mh_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} (f(x_n+h_n) - f(x_n)) \leq f(b) - f(a).$$

Como $M > 0$ era arbitrario, resulta que $m^*(F) = 0$.

Hasta el momento se ha demostrado que f es derivable en casi todas sus partes. Luego, según el ejercicio 5, la derivada de f, f', es una función medible.

Para cada $n \in \mathbf{N}$, defínase $f_n:[a,b] \to \mathbf{R}$ mediante

$$f_n(x) = n(f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x)) \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

(aquí se escribe $f(x) = f(b)$ para todo $x > b$).

Entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas y $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f'$ c.t.p. Ahora se está en condiciones de aplicar el Lema de Fatou (teorema 2.3.1) y concluir que:

$$\int_{[a,b]} f'\,dm = \int_{[a,b]} (\lim_{n\to\infty} \inf f_n)dm \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_{[a,b]} f_n\,dm =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \inf[n\int_{[b,b+\frac{1}{n}]} f\,dm - n\int_{[a,a+\frac{1}{n}]} f\,dm] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \inf[f(b) - n\int_{[a,a+\frac{1}{n}]} f] \leq f(b) - f(a).$$

4.3. FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA. DIFERENCIACIÓN DE INTEGRALES

Definición 4.3.1. Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ una función y $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una subdivisión de $[a,b]$. Se define

$$p(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+$$

$$n(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^-$$

$$t(f,\sigma) = p(f,\sigma) + n(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Finalmente se definen las variaciones positiva, negativa y total de f sobre $[a,b]$ mediante

$$P_a^b(f) = \sup\{p(f,\sigma): \sigma \in P_{[a,b]}\}$$

$$N_a^b(f) = \sup\{n(f,\sigma): \sigma \in P_{[a,b]}\}$$

$$T_a^b(f) = \sup\{t(f,\sigma): \sigma \in P_{[a,b]}\}$$

respectivamente.

Definición 4.3.2. Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ y $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ una función. Se dirá que f es de variación acotada sobre $[a, b]$, si $T_a^b(f) < \infty$.

Observación 4.3.3. Si f es de variación acotada sobre $[a, b]$, entonces f es de variación acotada sobre $[a, x]$, para todo $x \in [a, b]$.

Proposición 4.3.4. Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ y $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ una función de variación acotada. Entonces

$$f(b) - f(a) = P_a^b(f) - N_a^b(f) \quad \text{y}$$

$$T_a^b(f) = P_a^b(f) + N_a^b(f).$$

Demostración. Sea $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una subdivisión de $[a, b]$. Se tiene:

$$\begin{aligned} p(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+ &= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}) + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^-) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) + n(f, \sigma) = \\ &= f(b) - f(a) + n(f, \sigma). \end{aligned}$$

Luego:

$$p(f, \sigma) \le N_a^b(f) + (f(b) - f(a)),$$

y por lo tanto,

$$P_a^b(f, \sigma) \le N_a^b(f) + (f(b) - f(a)).$$

Como $N_a^b(f) \le T_a^b(f) < \infty$, se tiene que:

$$P_a^b(f) - N_a^b(f) \le f(b) - f(a).$$

De manera similar se concluye que:

$$N_a^b(f) - P_a^b(f) \le f(a) - f(b)$$

y, por lo tanto, se tiene:

$$P_a^b(f) - N_a^b(f) = f(b) - f(a),$$

lo que demuestra la primera igualdad.

Ahora bien, si σ es cualquier subdivisión de $[a, b]$, se tiene:

$$\begin{aligned} T_a^b(f) \ge p(f, \sigma) + n(f, \sigma) &= p(f, \sigma) + p(f, \sigma) - (f(b) - f(a)) = \\ &= 2p(f, \sigma) + N_a^b(f) - P_a^b(f). \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$T_a^b(f) \ge 2P_a^b(f) + N_a^b(f) - P_a^b(f) = P_a^b(f) + N_a^b(f).$$

Por otra parte, es fácil ver que:

$$T_a^b(f) \leq P_a^b(f) + N_a^b(f),$$

de donde se concluye la segunda igualdad.

Teorema 4.3.5. (Teorema de Descomposición de Jordan). *Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ y $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ una función. Entonces f es de variación acotada si, y sólo si, f es la diferencia de dos funciones reales monótonas crecientes sobre $[a,b]$.*

Demostración. Supongamos primero que $f = g - h$, donde g y h son funciones reales monótonas crecientes sobre $[a,b]$. Entonces, si $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una subdivisión de $[a,b]$, se tiene:

$$t(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |h(x_i) - h(x_{i-1})| =$$

$$= g(b) - g(a) + h(b) - h(a).$$

Luego:

$$T_a^b(f) \leq g(b) - g(a) + h(b) - h(a) < \infty,$$

y se concluye que f es de variación acotada.

Supongamos ahora que f es de variación acotada y definamos g, h: $[a,b] \to \mathbf{R}$ mediante

$$g(x) = P_a^x(f) \quad \forall\, x \in [a,b]$$
$$h(x) = N_a^x(f) \quad \forall\, x \in [a,b].$$ 87

Puesto que f es de variación acotada sobre $[a,b]$, se tiene que g y h están bien definidas como funciones reales. Es muy sencillo demostrar que cada una de ellas es monótona creciente. La observación 4.3.6 dice (restringiéndonos a $[a,x]$) que:

$$f(x) - f(a) = g(x) - h(x),$$

es decir:

$$f(x) = f(a) + g(x) - h(x) \quad \forall\, x \in [a,b],$$

lo que demuestra que f es la diferencia dedos funciones monótonas crecientes.

Observación 4.3.6. El teorema 4.3.5, junto con el teorema 4.2.6, da como resultado que toda función de variación acotada es diferenciable en casi todas sus partes en $[a,b]$.

Proposición 4.3.7. Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ y $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ una función integrable Lebesgue. Entonces, si $\int_{[a,x]} f\, dm = 0$ para todo $x \in [a,b]$, se tiene que $f(x) = 0$ c.t.p. en $[a,b]$.

Demostración. Supongamos que no sea cierto que $f(x) = 0$ c.t.p. en $[a,b]$. Entonces debe existir un subconjunto E de $[a,b]$ de medida positiva tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in E$ o $f(x) < 0$ para todo $x \in E$. Se supondrá, sin pérdida de generalidad, que $f(x) > 0$ para todo $x \in E$.

De este modo, se puede afirmar (véase la definición de medida interior) que existe un subconjunto cerrado F de E tal que $m(F) > 0$. Sea $V = (a,b)\setminus F$. Entonces, como $\int_{[a,b]} f\,dm = 0$, se tiene, necesariamente, que:

$$\int_V f\,dm + \int_F f\,dm = 0,$$

es decir $\int_V f\,dm = -\int_F f\,dm \neq 0$.

Vale recordar ahora que por ser V un subconjunto abierto de $\mathbf{R}$, es la unión de una colección numerable y disjunta de intervalos abiertos, es decir

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n).$$

Consecuencia inmediata del Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue es que:

$$\int_V f\,dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(a_n,b_n)} f\,dm.$$

Puesto que $\int_V f\,dm \neq 0$, debiera asumirse que existe $n \in \mathbf{N}$ tal que:

$$\int_{(a_n,b_n)} f\,dm \neq 0.$$

Pero:

$$\int_{(a_n,b_n)} f\,dm = \int_{[a,b_n]} f\,dm - \int_{[a,a_n]} f\,dm = 0,$$

lo que es una contradicción. Luego hay que concluir que $f = 0$ c. t. p. en $[a,b]$.

Teorema 4.3.8. *Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ y $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ una función integrable Lebesgue. Definamos $F\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ mediante*

$$F(x) = \int_{[a,x]} f\,dm \quad \forall x \in [a,b].$$

Entonces F es una función continua de variación acotada sobre $[a,b]$ y

$$F'(x) = f(x) \ \text{ c. t. p. en } [a,b].$$

Demostración. La continuidad es una consecuencia inmediata del Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue.

Pasemos a demostrar a continuación que F es de variación acotada.

Sea $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una subdivisión de $[a,b]$. Se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{[a,x_i]} f\,dm - \int_{[a,x_{i-1}]} f\,dm \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{[x_{i-1}, x_i]} f\, dm \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_{i-1}, x_i]} |f|\, dm =$$

$$= \int_{[a,b]} |f|\, dm.$$

Luego $T_a^b(F) \leq \int_{[a,b]} |f|\, dm$, lo que muestra que F es de variación acotada sobre $[a, b]$.

Para demostrar que $F' = f$ c.f.p. en $[a, b]$, supóngase primero que f es acotada, es decir $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in [a, b]$.

Para cada $n \in \mathbf{N}$, escríbase

$$f_n(x) = n(F(x+\tfrac{1}{n}) - F(x)) \quad \forall x \in [a, b].$$

Entonces:

$$f_n(x) = n \int_{[x, x+\frac{1}{n}]} f\, dm.$$

Luego, $|f_n(x)| \leq K$ $\forall x \in [a, b]$, y además $f_n(x) \to F'(x)$ c.t.p. en $[a, b]$. Por consiguiente, puesto que $m([a, b]) = b - a < \infty$, cabe aplicar el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue a fin de concluir que si $x \in [a, b]$,

$$\int_{[a,x]} F'\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,x]} f_n\, dm = \lim_{n\to\infty} n\left[\int_{[x,x+\frac{1}{n}]} F\, dm - \int_{[a,a+\frac{1}{n}]} F\, dm\right] =$$

$$= F(x) - F(a) \text{ (puesto que } F \text{ es continua)} =$$

$$= F(x) = \int_{[a,x]} f\, dm.$$

Por consiguiente:

$$\int_{[a,x]} (F' - f) dm = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

y en virtud de la proposición 4.3.7 es posible concluir que:

$$F' = f \text{ c.t.p. en } [a, b].$$

Ahora veamos el caso $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ arbitraria, integrable Lebesgue. Adviértase ante todo que basta considerar $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Para cada $n \in \mathbf{N}$ defínase $f_n, F_n, G_n: [a, b] \to \mathbf{R}$ mediante

$$f_n(x) = f(x), \text{ si } f(x) \leq n$$

$$f_n(x) = n, \text{ si } f(x) > n$$

$$F_n(x) = \int_{[a,x]} f_n\, dm \quad \forall x \in [a, b]$$

$$G_n(x) = \int_{[a,x]} (f - f_n)dm.$$

Se observa que G_n es una función monótona creciente y por lo tanto derivable c.t.p. y $G_n'(x) \geq 0$ c.t.p. Además, puesto que f_n es acotada y medible en $[a,b]$, se tiene por lo recién demostrado que F_n es derivable c.t.p. y que $F_n' = f_n$ c.t.p. en $[a,b]$. Luego:

$$F'(x) = G_n'(x) + F_n'(x) \geq f_n(x) \text{ c.t.p.}$$

Como n es arbitrario, se tiene necesariamente que:

$$\int_{[a,b]} F'\,dm \geq \int_{[a,b]} f\,dm = F(b).$$

El teorema 4.2.6 permite concluir, puesto que F es monótona creciente, que:

$$\int_{[a,b]} F'\,dm = \int_{[a,b]} f\,dm.$$

Luego:

$$\int_{[a,b]} (F' - f)dm = 0$$

y como se sabe que $F' - f \geq 0$ c.t.p., resulta

$$F' = f \text{ c.t.p.}$$

Observación 4.3.9. El teorema 4.3.8 es una generalización completa del Teorema Fundamental del Cálculo I.

4.4. CONTINUIDAD ABSOLUTA. INTEGRACIÓN DE DERIVADAS

Definición 4.4.1. Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ y $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ una función. Se dirá que f es absolutamente continua en $[a,b]$ si, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que toda vez que $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}$ es una colección finita disjunta de subintervalos abiertos de $[a,b]$ tal que

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i - x_i) < \delta$$

se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{N} |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon.$$

Observación 4.4.2. Toda función absolutamente continua es continua.

Lema 4.4.3. Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ y $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ una función absolutamente continua. Entonces f es de variación acotada.

Demostración. Tomando $\varepsilon = 1$ elíjase $\delta > 0$ de acuerdo con la definición 4.4.1. Sean N el mayor número natural menor que $1 + \frac{b-a}{\delta}$ y σ^1 una subdivisión de $[a,b]$.

Escríbase:

$$\sigma_0 = \{a, a + \frac{b-a}{N}, a + \frac{2(b-a)}{N}, \ldots, a + \frac{i(b-a)}{N}, \ldots, b\}$$

y obsérvese que si se denota $z_i = a + \frac{i(b-a)}{N}$, $i = 0, 1, \ldots, N$, se tiene que:

$$z_i - z_{i-1} < \delta \quad i = 1, \ldots, N.$$

Ahora se define $\sigma = \sigma^1 \cup \sigma_0$. Denótese

$$\sigma = \{x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{k_0}^0, x_1^1, \ldots, x_{k_1}^1, \ldots, x_{k_{N-1}}^{N-1}, x_N^N\}$$

donde

$$x_i^i = z_i, \; i = 0, 1, \ldots, N.$$

Obsérvese que:

$$t(f, \sigma^1) \le t(f, \sigma) = \sum_{j=1}^{k_0} |f(x_j^0) - f(x_{j-1}^0)| + |f(x_1^1) - f(x_{k_0}^0)| + \sum_{j=1}^{k_1} |f(x_j^1) -$$

$$- f(x_{j-1}^1)| + \ldots + \sum_{j=1}^{k_{N-1}} |f(x_j^{N-1}) - f(x_{j-1}^{N-1})| + |f(x_N^N) - f(x_{k_{N-1}}^{N-1})| < N.$$

Luego $T_a^b(f) \le N$, y se concluye que f es de variación acotada.

Corolario 4.4.4. Toda función absolutamente continua es derivable en casi todas sus partes.

Proposición 4.4.5. Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ y $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ una función absolutamente continua. Entonces, si $f'(x) = 0$ c.t.p., se tiene que f es constante.

Demostración. Sea $x \in (a, b)$. Se demostrará que $f(x) = f(a)$.

Sea $E \subseteq (a, x)$ tal que $m(E) = x - a$ y $f'(x) = 0 \;\; \forall x \in E$.

Sean $\epsilon > 0$ y $\eta > 0$ dados, y sea $\delta > 0$ un número positivo correspondiente a ϵ en la definición de continuidad absoluta.

Para cada $y \in E$ existen intervalos de la forma $[y, y+h]$, de longitud arbitrariamente pequeña, contenidos en $[a, x]$ y tales que $|f(x+h) - f(x)| < \eta h$. La colección de tales intervalos $[y, y+h]$ e $y \in E$ es un cubrimiento de Vitali para E, y luego, en virtud del teorema 4.2.3, se puede encontrar una colección finita y disjunta $\{[y_k, y_k + h_k]\}_{k=1}^N$ tal que:

$$m^*(E \setminus \bigcup_{k=1}^N [y_k, y_k + h_k]) < \delta.$$

Consideraremos, sin pérdida de generalidad, que $y_k \le y_{k+1}$, $k = 1, \ldots, N-1$.

Se tiene:

$$y_0 = a \le y_1 < y_1 + h_1 \le y_2 < \ldots < y_N \le x = y_{N+1}$$

y, además:

$$\sum_{k=0}^{N} |y_{k+1} - (y_k + h_k)| < \delta .$$

Ahora bien:

$$\sum_{k=1}^{N} |f(y_k + h_k) - f(y_k)| \le \eta \sum_{k=1}^{N} h_k < \eta (x - a)$$

y

$$\sum_{k=0}^{N} |f(y_{k+1}) - f(y_k + h_k)| < \epsilon .$$

Luego:

$$|f(x) - f(a)| = \left| \sum_{k=0}^{N} (f(y_{k+1}) - f(y_k + h_k)) + \sum_{k=1}^{N} (f(y_k + h_k) - f(y_k)) \right| \le$$

$$\le \epsilon + \eta (b - a).$$

Como ϵ y η eran arbitrarios (positivos), se tiene necesariamente que:

$$f(x) = f(a).$$

Teorema 4.4.6. *Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ y $F:[a,b] \to \mathbf{R}$ una función derivable en casi todas sus partes con derivada $F' = f$* c.t.p. *en $[a,b]$. Una condición necesaria y suficiente para que f sea integrable Lebesgue y que*

$$F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} f \, dm$$

es que F sea absolutamente continua.

Demostración. Supóngase en primer lugar que F es absolutamente continua. Entonces F es de variación acotada y se escribe:

$$F(x) = G(x) - H(x)$$

donde $G, H: [a,b] \to \mathbf{R}$ son funciones monótonas crecientes. Se tiene que:

$$|F'(x)| \le G'(x) + H'(x) \text{ c.t.p. en } [a,b]$$

y por lo tanto

$$\int_{[a,b]} |F'| \, dm \le G(b) + H(b) - G(a) - H(a).$$

Luego f es integrable Lebesgue.

Ahora se define $F_1: [a,b] \to \mathbf{R}$ mediante

$$F_1(x) = \int_{[a,x]} f \, dm.$$

Es bien sabido que F_1 es absolutamente continua y es fácil mostrar que $g = F - F_1$ también lo es.

El teorema 4.3.8 trae como consecuencia que:

$$g' = 0 \text{ c.t.p. en } [a,b]$$

y por la proposición 4.4.5

$$g(x) = g(a) = F(a) \quad \forall x \in [a,b],$$

es decir:

$$F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} f\, dm \quad \forall x \in [a,b].$$

Pasemos a suponer que f es integrable Lebesgue y que

$$F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} f\, dm \quad \forall x \in [a,b].$$

Hay que mostrar que F es absolutamente continua. Para ello adviértase en primer lugar que basta demostrar que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $A \subseteq [a,b]$ es medible y $m(A) < \delta$ entonces

$$\int_A |f|\, dm < \epsilon.$$

Sea $\epsilon > 0$.

Es claro que si f es acotada, todo resulta bien (ya que si $K > 0$ es tal que $|f(x)| < K \ \forall x \in [a,b]$, basta tomar $\delta = \frac{\epsilon}{2K}$). Supondremos, por consiguiente, que f no es acotada y para cada $n \in \mathbf{N}$ definimos:

$$f_n(x) = |f(x)| \text{ si } |f(x)| \leq n$$
$$f_n(x) = n \text{ si } |f(x)| > n.$$

Entonces $f_n \to |f|$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona creciente de funciones medibles no negativas. Puesto que:

$$\int_{[a,b]} |f|\, dm < \infty,$$

el Teorema de Convergencia Monótona establece que existe $N \in \mathbf{N}$ tal que

$$\int_{[a,b]} (|f| - f_N) dm < \frac{\epsilon}{2}.$$

Se elige ahora $\delta = \frac{\epsilon}{3N}$.

Se tiene que si $A \subseteq [a,b]$ es medible y $m(A) < \delta$, entonces

$$\int_A |f|\, dm = \int_A (|f| - f_N) dm + \int_A f_N\, dm \leq$$

$$\leq \int_{[a,b]} (|f| - f_N)dm + Nm(A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Observación 4.4.7. El teorema 4.4.6 da la mayor generalización posible del Teorema Fundamental del Cálculo II cuando se considera la integral en el sentido de Lebesgue.

Conviene anotar además que hay funciones continuas que no son de variación acotada (y, por lo tanto, no son absolutamente continuas), como lo muestra el ejercicio 17. Un ejemplo extremo es el de una función continua que no posee derivada en punto alguno. Wierstrass, en 1875, demostró que, si a es un número natural impar y b es un número real tal que $0 < b < 1$ y $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, entonces la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x) \quad \forall\, x \in \mathbf{R}$$

es continua y no posee derivada en punto alguno. La continuidad de f es inmediata, pero la segunda propiedad no es fácil de comprobar y no se demostrará aquí.

Ejercicios

1) Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ y $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ una función integrable Lebesgue. Defínase $F:[a,b] \to \mathbf{R}$ mediante

$$F(x) = \int_{[a,x]} f\, dm.$$

Demuéstrese que F es una función continua.

2) Dé una interpretación geométrica del concepto de derivada.

3) Demuestre las conclusiones de la observación 4.1.2.

4) Demuéstrese la proposición 4.1.3.

5) Sean I un intervalo y $f: I \to \mathbf{R}$ una función derivable en casi todas partes. Demuéstrese que la derivada de f, f', es una función medible.

6) Demuéstrese el teorema 4.1.4.

7) Demuéstrese la proposición 4.1.5.

8) Demuéstrese el teorema de Rolle.

9) Dé una interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio.

10) Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n$ números reales, $a_0 \neq 0$. Demuéstrese que si

$$\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0$$

entonces la ecuación

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

posee al menos una solución en el intervalo $(0, 1)$.

11) Sean I un intervalo abierto, $f: I \to \mathbf{R}$ una función diferenciable y $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$. Demuéstrese que si z es un número real entre $f'(x_1)$ y $f'(x_2)$, entonces existe x entre x_1 y x_2 tal que $f'(x) = z$.

12) Demuéstrese el corolario 4.1.9.

13) Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ y $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ una función monótona decreciente. Demuéstrese que f es derivable en casi todas sus partes, que su derivada f' es medible y que

$$\int_{[a,b]} f'\, dm \geq f(b) - f(a).$$

14) Sea E un subconjunto arbitrario de $\mathbf{R}$ e Y un cubrimiento de Vitali para E. Demuéstrese que dado $\varepsilon > 0$, hay una sucesión disjunta $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de Y tal que

$$m^*(E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n) = 0.$$

15) Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ una función monótona creciente y $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}$ una colección finita y disjunta de intervalos abiertos contenidos en $[a, b]$. Demuéstrese que

$$\sum_{i=1}^{N} (f(y_i) - f(x_i)) \leq f(b) - f(a).$$

16) Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ y $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ una función continua que es diferenciable en (a, b) y su derivada es acotada en (a, b). Demuéstrese que f es de variación acotada.

17) Demuéstrese que la función $f: [0, 2] \to \mathbf{R}$ dada por

$$f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \quad 0 < x \leq 2$$

$$f(0) = 0$$

es una función continua que no es de variación acotada.

18) Defínase $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ mediante

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \quad 0 < x \leq 1$$

$$f(0) = 0.$$

¿Es f de variación acotada?

19) Constrúyase una función $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ continua y monótona creciente tal que $f' = 0$ c.t.p. en $[0, 1]$ y

$$0 = \int_{[0,1]} f'\, dm < f(1) - f(0).$$

20) Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ y $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ una función absolutamente continua y monótona en $[a, b]$. Demuéstrese que si $E \subseteq [a, b]$ es un conjunto de medida cero, entonces $f(E)$ posee medida cero.

21) Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ y $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ una función absolutamente continua. Demuéstrese que

$$T_a^b(f) = \int_{[a,b]} |f'| \, dm.$$

22) Sean $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ y $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ una función continua. Demuéstrese que si f es absolutamente continua en $[a, c]$ para todo $c \in (a, b)$, entonces f es absolutamente continua en $[a, b]$.

23) Defínase $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ mediante

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad 0 < x \leq 1$$

$$f(0) = 0.$$

¿Es f absolutamente continua?

BIBLIOGRAFÍA

Lo tratado en esta monografía no es sino el comienzo de la teoría de integración por lo que se aconseja al lector interesado continuar su estudio, pues se trata de una herramienta en extremo útil.

Para profundizar los conocimientos básicos sobre análisis real y entrar en algunos desarrollos posteriores de la integral de Lebesgue, se recomiendan los siguientes textos:

(1) GOLDBERG, R.R. Methods of Real Analysis, Blaisdell, Nueva York, N.Y., 359 págs. (1964).

(2) HARTMAN, S. y MIKUSINSKI, J. The Theory of Lebesgue Measure and Integration, Pergamon, Nueva York, N.Y., 176 págs. (1961).

Para un estudio avanzado sobre teoría de integración, se recomiendan:

(3) BARTLE, R.G. The Elements of Integration, Wiley, Nueva York, N.Y., 124 págs. (1966).

(4) HEWITT, E. y STROMBERG, K. Real and Abstract Analysis, Springer-Verlag, Nueva York, N.Y., 476 págs. (1969).

(5) ROYDEN, H.L. Real Analysis, Macmillan, Nueva York, N.Y., 349 págs. (1963).

(6) RUDIN, W. Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, Nueva York, N.Y., 412 págs. (1966).

COLECCIÓN DE MONOGRAFÍAS CIENTÍFICAS

Publicadas

Serie de matemática

- Nº 1. La Revolución en las Matemáticas Escolares, por el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas de los Estados Unidos de América.
- Nº 2. Espacios Vectoriales y Geometría Analítica, por Luis A. Santaló.
- Nº 3. Estructuras Algebraicas I, por Enzo R. Gentile.
- Nº 4. Historia de las Ideas Modernas en la Matemática, por José Babini.
- Nº 5. Álgebra Lineal, por Orlando E. Villamayor.
- Nº 6. Álgebra Linear e Geometria Euclidiana, por Alexandre Augusto Martins Rodrigues.
- Nº 7. El Concepto de Número, por César A. Trejo.
- Nº 8. Funciones de Variable Compleja, por José I. Nieto.
- Nº 9. Introducción a la Topología General, por Juan Horváth.
- Nº 10. Funções Reais, por Djairo G. de Figueiredo.
- Nº 11. Probabilidad e Inferencia Estadística, por Luis A. Santaló.
- Nº 12. Estructuras Algebraicas II (Álgebra Lineal), por Enzo R. Gentile.
- Nº 13. La Revolución en las Matemáticas Escolares (Segunda Fase), por Howard F. Fehr, John Camp y Howard Kellogg. 99
- Nº 14. Estructuras Algebraicas III (Grupos Finitos), por Horacio H. O'Brien.
- Nº 15. Introducción a la Teoría de Grafos, por Fausto A. Toranzos.
- Nº 16. Estructuras Algebraicas IV (Álgebra Multilineal), por Artibano Micali y Orlando E. Villamayor.
- Nº 17. Introdução à Análise Funcional: Espaços de Banach e Cálculo Diferencial, por Leopoldo Nachbin.
- Nº 18. Introducción a la Integral de Lebesgue en la Recta, por Juan Antonio Gatica.

Serie de física

- Nº 1. Concepto Moderno del Núcleo, por D. Allan Bromley.
- Nº 2. Panorama de la Astronomía Moderna, por Félix Cernuschi y Sayd Codina.
- Nº 3. La Estructura Electrónica de los Sólidos, por Leopoldo M. Falicov.
- Nº 4. Física de Partículas, por Igor Saavedra.
- Nº 5. Experimento, Razonamiento y Creación en Física, por Félix Cernuschi.
- Nº 6. Semiconductores, por George Bemski.
- Nº 7. Aceleradores de Partículas, por Fernando Alba Andrade.
- Nº 8. Física Cuántica, por Onofre Rojo y Harold V. McIntosh.
- Nº 9. La Radiación Cósmica, por Gastón R. Mejía y Carlos Aguirre.
- Nº 10. Astrofísica, por Carlos Jaschek y Mercedes C. de Jaschek.
- Nº 11. Ondas, por Oscar J. Bressan y Enrique Gaviola.
- Nº 12. El Láser, por Mario Garavaglia.

Serie de química

- N° 1. Cinética Química Elemental, por Harold Behrens Le Bas.
- N° 2. Bioenergética, por Isaias Raw y Walter Colli.
- N° 3. Macromoléculas, por Alejandro Paladini y Moisés Burachick.
- N° 4. Mecanismo de las Reacciones Orgánicas, por Jorge A. Brieux.
- N° 5. Elementos Encadenados, por Jacobo Gómez-Lara.
- N° 6. Enseñanza de la Química Experimental, por Francisco Giral.
- N° 7. Fotoquímica de Gases, por Ralf-Dieter Penzhorn.
- N° 8. Introducción a la Geoquímica, por Félix González-Bonorino.
- N° 9. Resonancia Magnética Nuclear de Hidrógeno, por Pedro Joseph-Nathan.
- N° 10. Cromatografía Líquida de Alta Presión, por Harold M. McNair y Benjamín Esquivel H.
- N° 11. Actividad Óptica, Dispersión Rotatoria Óptica y Dicroísmo Circular en Química Orgánica, por Pierre Crabbé.
- N° 12. Espectroscopia Infrarroja, por Jesús Morcillo Rubio.
- N° 13. Polarografía, por Alejandro J. Arvía y Jorge A. Bolzan.
- N° 14. Paramagnetismo Electrónico, por Juan A. McMillan.
- N° 15. Introducción a la Estereoquímica, por Juan A. Garbarino.
- N° 16. Cromatografía en Papel y en Capa Delgada, por Xorge A. Domínguez.
- N° 17. Introducción a la Espectrometría de Masa de Sustancias Orgánicas, por Otto R. Gottlieb y Raimundo Braz Filho.

Serie de biología

- N° 1. La Genética y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por José Luis Reissig.
- N° 2. Bases Ecológicas de la Explotación Agropecuaria en la América Latina, por Guillermo Mann F.
- N° 3. La Taxonomía y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por Elías R. de la Sota.
- N° 4. Principios Básicos para la Enseñanza de la Biología, por Oswaldo Frota-Pessoa.
- N° 5. A Vida da Célula, por Renato Basile.
- N° 6. Microorganismos, por J. M. Gutiérrez-Vázquez.
- N° 7. Principios Generales de Microbiología, por Norberto J. Palleroni.
- N° 8. Los Virus, por Enriqueta Pizarro-Suárez y Gamba.
- N° 9. Introducción a la Ecología del Bentos Marino, por Manuel Vegas Vélez.
- N° 10. Biosíntesis de Proteínas y el Código Genético, por Jorge E. Allende.
- N° 11. Fundamentos de Inmunología e Inmunoquímica, por Félix Córdoba Alva y Sergio Estrada-Parra.
- N° 12. Bacteriófagos, por Romilio Espejo T.
- N° 13. Biogeografía de América Latina, por Angel L. Cabrera y Abraham Willink.
- N° 14. Relación Huésped-Parásito. Mecanismo de Patogenicidad de los Microorganismos, por Manuel Rodríguez Leiva.

N° 15. Genética de Poblaciones Humanas, por Francisco Rothhammer.

N° 16. Introducción a la Ecofisiología Vegetal, por Ernesto Medina.

En preparación

Serie de matemática

Estructuras Algebraicas VI (Estructura de Álgebras), por Artibano Micali.
Biomatemática, por Alejandro Engel.
Introducción al Análisis, por Manuel Balanzat.
Introducción a los Espacios de Hilbert, por José I. Nieto.
Introducción a la Computación, por Jaime Michelow.
Programación Lineal, por Fernando L. Garagorry.

Serie de física

Oceanografía Física, por Luis E. Herrera.
Teoría de Fluidos en Equilibrio, por Antonio E. Rodríguez y Roberto E. Caligaris.
Aplicação da Teoria de Grupos na Espectroscopia Raman e do Infra-Vermelho, por Jorge Humberto Nicola y Anildo Bristoti.
Teoría Estadística de la Materia, por Antonio E. Rodríguez y Roberto E. Caligaris.
Geofísica, por Alvaro F. Espinosa.
Introducción a la Espectroscopia Atómica, por Mario Garavaglia y Athos Giachetti.

Serie de química

Fotometría de Llama por Emisión, por Juan Ramírez Muñoz.
Fotometría de Llama por Absorción Atómica, por Juan Ramírez Muñoz.
Fluorescencia Atómica, por Juan Ramírez Muñoz.
Cromatografía de Gases, por Harold M. McNair.
Síntesis Orgánica, por Eduardo Sánchez.
Catálisis Homogénea, por Eduardo Humeres A.
Catálisis Heterogénea, por Sergio Droguett.
Fuerzas Intermoleculares, por Mateo Díaz Peña.
Introducción a la Electroquímica, por Dionisio Posadas.
Corrosión, por José Rodolfo Galvele.
Coloides, por Javier Garfias.
Química de Suelos, por Elemer u. Bornemisza.
Introducción a la Metalurgia Física, por Joaquín Hernáez Marín.

Serie de biología

Procesos Microbianos Aerobios de Importancia Industrial, por Carlos Casas-Campillo.
Etología: El Estudio del Comportamiento Animal, por Raúl Vaz-Ferreira.

Citogenética Básica y Biología de los Cromosomas, por F. A. Saez y H. Cardoso.

Citogenética Ultraestructural y la Biología Molecular de los Cromosomas, por R. Wettstein y J. Roberto Sotelo.

Análisis de Sistemas en Ecología, por Gilberto C. Gallopín.

Ecología de Poblaciones Animales, por Jorge E. Rabinovich.

Sistemas Ecológicos y el Hombre, por Ariel E. Lugo y Greg Morris.

Aspectos de Biología Celular y la Transformación Maligna, por Manuel Rieber.

Comportamiento y Aprendizaje, por Héctor Maldonado y Josué A. Núñez.

Principios Básicos de la Contracción Muscular, por Carlos Caputo.

Transporte a Través de la Membrana Celular, por Patricio J. Garrahan y Alcides Rega.

Duplicación Cromosómica y Heterocromatina a Nivel Molecular y Citológico, por Nestor O. Bianchi.

Germinación, por Luiz Gouvêa Labouriau.

Nota: Las personas interesadas en adquirir estas obras deben dirigirse a la Unidad de Ventas y Promoción, Organización de los Estados Americanos, Washington, D. C., 20006 o a las Oficinas de la Secretaría General de la OEA en el país respectivo.